

第一章 緒論

1.1 前言

倒單擺系統為一個不穩定系統，同時具有非極小相位 (Non-Minimum Phase) 特性，是一個典型的控制題目。由於倒單擺系統機械結構簡單，因此被廣泛的用在驗證各種控制理論與教學上。

在控制實驗中，倒單擺系統 (Inverted Pendulum System) 是一個非常重要的系統。一般常用的倒單擺系統可分為旋轉型、直線型兩種。在直線型倒單擺系統中，系統主要由推車和擺錘所構成，其操作原理為利用一維推車直線運動，將擺錘甩起，並保持直立；而旋轉型倒單擺系統，則利用馬達當致動器，轉動連桿，使其擺動，並控制擺錘甩起後直立不倒。本文以直線型倒單擺系統為例，利用工程計算軟體Matlab中的Simulink進行控制器設計及模擬。主要包含了幾個部分：控制器、馬達、倒單擺機構動態模型。

1.2 文獻回顧

洪介仁推導倒單擺系統的數學模型，建立直流馬達模型求出參數，利用模擬的方式比較 L. Q. R. 與極點配置控制法的優劣，再以 L. Q. R. 控制在斜面上的倒單擺[1]。詹富強以德州儀器公司的數位信號處理器作為控制核心，實現上甩平衡控制[2]。范揚欣以 F. P. G. A. 實現 P. I. D. 及模糊控制器理論，而控制在斜面的倒單擺[3]。林群弼考慮倒單擺系統延遲輸入條件，比較倒單擺的穩定性，並分析保守性的穩定性，設計延遲後的狀態迴授控制器，實驗證明可以穩定延遲後的倒單擺系統[4]。陳嘉偉以雙輸入輸出耦合動態線性系統及非線性動態系統，演算基因模糊控制設計，而不採用傳統控制參數設計，找出控制器的最佳化參數[5]。李珈松以車輪式倒單擺控制平衡，控制系統使用傾斜計、陀螺儀，實現平衡控制車身傾斜角以及角速度[6]。簡立杰推導倒單擺系統的數學模型，並結合機械、電氣兩個部分，採用 L. Q. R. 設計控制器平衡倒單擺系統[7]。葉晉榮以滑動模式降低模糊邏輯規則數目的控制，將系統分解出兩個子系統，研究模糊解耦合，再以適應性控制法則完成倒單擺系統的穩定性以及台車的定位[8]。呂育儒分別以 L. Q. R.、順滑模態、 H_{∞} 設計控制器而使用在 Furuta 倒單擺，比較這三個控制器的優劣，驗證其強韌性及性能[9]。許倩芸利用等效誤差法作為理論，提出廣義的運動系

統，建立雙輪倒單擺車輛循跡控制模型[10]。葉儒昌研究 D.C. 馬達的驅動，將非線性與適應性遞迴步階控制設計方法來控制兩輪倒單擺系統，進行平衡軌跡追蹤設計控制[11]。賴彥翔利用模糊理論平行分散補償 (P. D. C.) 設計，來穩定控制系統，再以粒子群聚最佳化，取得非線性系統的輸入輸出資料，作為系統鑑別[12]。許多學者提出二階段(Two-Phase)，以單擺角度位置作切換的控制法則，即上甩 (Swing-Up) 的控制法則和直立性的控制法則[13]。Cho and Jung 以分散式類神經網路設計 X 軸和 Y 軸控制器而在 X-Y table 上平衡單桿二維倒單擺，並以 sin、cos 函數為信號使單擺車追蹤半徑 10 cm 的圓形，其最大追蹤誤差約為 2.5 cm[14]。Shih 介紹摩擦力補償分為兩大類：非模型補償 (Non-Model-Based Compensation)、模型補償 (Model-Based Compensation)，以奈米級的精度，控制直線馬達運動平台[15]。Aguilar-Ibañez 等人結合 Lyapunov 函數及 LaSalle's invariance principle 穩定一維及二維倒單擺，模擬的結果，單擺車的收斂角度為整個上半平面，收斂時間長達 60 秒以上、台車擺幅約 5.5 米、單擺角度振盪周期約 10 秒，吾人認為實驗很難完成[16]。Wai and Chang 以分散式適應性順滑模態控制器 (Decentralize Adaptive Sliding-Mode Control) 設計控制器[17]。

1.3 研究動機

倒單擺系統的模擬與實驗往往存在可觀的誤差，如文獻[16]的穩定時間，其模擬與實驗的比值約為1：10，本文以模擬的方式，並考慮倒單擺系統的三個非線性現象，控制器的飽和輸出、台車位置和倒單擺的量化誤差、台車驅動機構的齒隙，期望能縮短模擬和實驗的數據誤差，最終以模擬代替實驗，節省實驗時間，加快研究速度。

1.4 研究方法

首先以線性回饋的方式穩定倒單擺系統，再將控制器的飽和輸出、台車位置和倒單擺角度在實驗量測時所必然產生的量化誤差、及台車驅動機構的齒隙等非線性因素，加入穩定後的系統，以期能縮短模擬和實驗的誤差。

1.5 內容大綱

本論文共分為五大章：第一章為緒論，包含倒單擺的文獻回顧、研究動機、研究方法、內容大綱。第二章為倒單擺系統的數學方程式模型推導、極點安置設計。第三章為控制器設計與模擬，包含控制系統設計、程式撰寫、模型建構與模擬，並個別考慮量化誤差、控制器飽和、台車驅動機構的齒隙，分別做模擬實驗統計表。第四章結論，考慮各項倒單擺的外界因素，經由模擬實驗結果後，所做的定

論。第五章參考文獻，為幾年下來所尋找收集的一些有關於本模擬實驗，所需要的文獻參考。

第二章 倒單擺系統的數學方程式模型

2.1 倒單擺系統的數學方程式模型

這是一個典型的同時具有移動及轉動的機械系統，如圖 2.1 所示。倒單擺是不穩定的系統，如果沒有適當的控制力作用在它上面，倒單擺隨時有可能向任何方向傾倒。假設倒單擺只在圖 2.1 的平面上運動，輪子與地面存在有摩擦力，桿子質量為 m （均勻分佈）、轉動慣量為 I 、桿長為 $2l$ [18]。

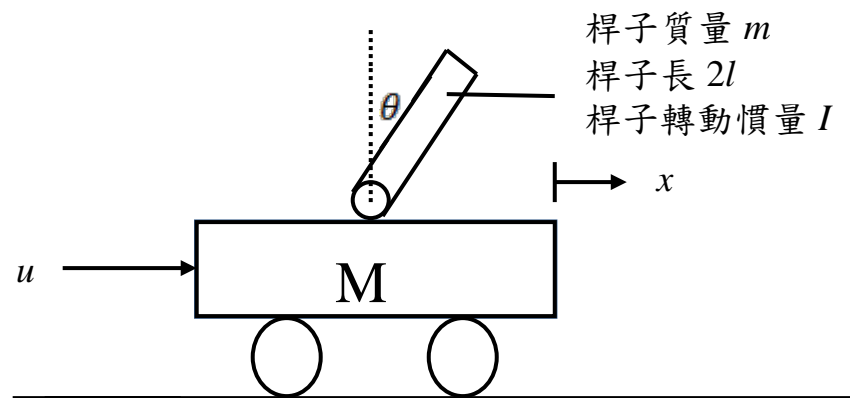


圖 2.1 倒單擺系統

圖 2.2 為桿子的自由體圖。

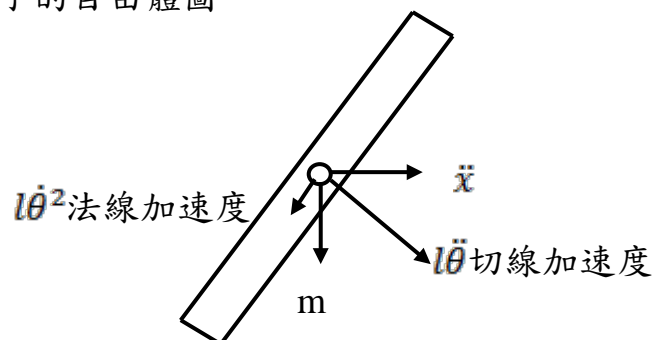


圖 2.2 桿子的自由體圖

圖 2.1 在 x 方向對倒單擺應用牛頓第二定律可得：

$$(M + m) \ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = u \dots \dots \dots (2.1)$$

圖 2.2 對桿子的支點取力矩可得：

$$(I + ml^2) \ddot{\theta} + ml \cos \theta \ddot{x} = mgl \sin \theta \dots \dots \dots (2.2)$$

假設倒單擺接近垂直狀態 ($\theta \leq 5^\circ$)，所以 $\cos \theta \approx 1$ ，

$\sin \theta \approx \theta$ ， $\dot{\theta}^2 \approx 0$ 則：

(2.1)、(2.2) 兩式可線性簡化為：

$$(M + m) \ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} = u \dots \dots \dots (2.3)$$

$$(I + ml^2) \ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \dots \dots \dots (2.4)$$

假設台車和地面的阻尼為零且單擺的質量集中在桿的中心 ($I = 0$)，則 (2.3)、(2.4) 式可簡化成：

$$(M + m) \ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \dots \dots \dots (2.5)$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} = g\theta \dots \dots \dots (2.6)$$

將 (2.6) 式 $\times (M + m)$ - (2.5) 式可得：

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m) g\theta - u \dots \dots \dots (2.7)$$

再將 (2.5) 式 - (2.6) $\times m$ 可得：

$$M \ddot{x} = u - mg\theta \dots \dots \dots (2.8)$$

定義狀態變數為：

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ x_3 &= \theta \\ x_4 &= \dot{\theta} \end{aligned}$$

設系統輸出為 x 和 θ ，即

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

根據 (2.7)、(2.8) 兩式及所定義的狀態變數可得：

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{m}{M}g x_3 + \frac{1}{M}u$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{M+m}{Ml}g x_3 - \frac{1}{Ml}u$$

則可得狀態方程式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m}{M}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{M+m}{Ml}g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \dots \dots \dots (2.9)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (2.10)$$

2.2 極點安置設計 (Pole Placement Design)

古典控制學與現代控制學的差異在於“狀態”的概念，分別以轉移函數及動態方程式為系統模型表示式。

狀態回授設計 (State Feedback Design) 是透過固定增益回授後的狀態變數，以得到預期閉迴路的極點，這就是所謂的極點安置設計。

圖 2.3 是極點安置設計法的架構流程圖，所採用的是線性非時變系統：

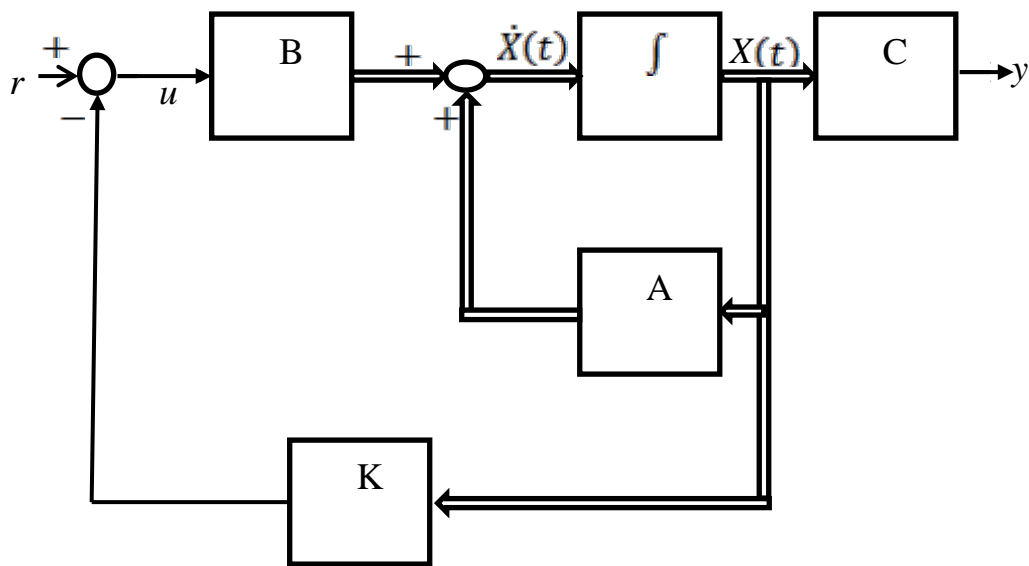


圖 2.3 極點安置設計法的架構流程圖

由上圖可列出以下三個方程式：

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \dots\dots\dots (2.11a)$$

$$y(t) = CX(t) \dots\dots\dots (2.11b)$$

$$u(t) = r(t) - KX(t) \dots\dots\dots (2.11c)$$

$u(t)$ 為狀態回授控制力、 K 為增益是一個 $1 \times n$ 階的列向量 (Row Vector)、 r 為輸入、 y 為輸出。將上式 $u(t)$ 代入 $\dot{X}(t)$ ，則極點安置設計閉迴路方程式為：

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t) \\ &= AX(t) + B[r(t) - KX(t)] \\ &= (A - BK)X(t) + Br(t) \dots\dots\dots (2.12a) \end{aligned}$$

$$y(t) = CX(t) \dots\dots\dots (2.12b)$$

上式由狀態回授增益 K 處理過後，則新的系統矩陣成為 $A - BK$ ，若調整回授增益矩陣 K 值，系統的特徵方程式將隨之改變，亦即改變系統的極點。

2.3 討論

本章探討倒單擺系統的數學方程式模型，運用牛頓第二定律及對桿子的支點取力矩方程式，推導出倒單擺系統的數學方程式模型。另外在於極點安置設計方面，說明了古典控制學與現代控制學的差异，在於狀態變數的設計，透過固定增益回授，以得到穩定的閉迴路極點。

第三章 控制器設計與模擬

3.1 控制系統設計

設計一個控制系統，使得在給定的初始條件下，能夠以適當的阻尼(相對於標準二階系統的 $\zeta = 0.6$) 迅速地(例如具有兩秒的安定時間) 將倒單擺恢復到垂直位置並且使推車返回到 $x = 0$ 的參考位置，假設 $M = 2\text{kg}$ 、 $m = 0.2\text{kg}$ 、 $l = 0.6\text{m}$ 。

將 M 、 m 及 l 值代入 (2.9) (2.10) 式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 17.97 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ -0.83 \end{bmatrix} u \dots\dots\dots (3.1)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.2)$$

安定時間兩秒，阻尼比 $\zeta = 0.6$ ，利用安定時間經驗公式：

上升時間 t_r ：

$$t_r \cong \frac{0.8 + 2.5\zeta}{\omega_n} \dots\dots\dots (3.3)$$

安定時間 t_s ：

輸出響應曲線的衰減率依 $\frac{1}{\zeta\omega_n}$ 之值而定

$$\text{如取 } 2\% \quad t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad 0 < \zeta < 1 \dots\dots\dots (3.4)$$

$$\text{如取 } 5\% \ t_s \cong \frac{3}{\zeta \omega_n} \quad 0 < \zeta < 1 \dots\dots\dots (3.5)$$

本文採用 2% 為安定時間，可求得自然無阻尼頻率 ω_n 為：

$$\omega_n \cong \frac{4}{t_s \zeta} = \frac{4}{1.2} = 3.33 \dots\dots\dots (3.6)$$

3.2 程式撰寫

% 倒單擺系統之極點安置設計

ζ = damping =0.6;

ω_n =wn=3.33;

[num1, den1]=ord2(wn, damping)

% 受控系統以狀態空間表示

A=[0 1 0 0;0 0 -0.98 0;0 0 0 1;0 0 17.97 0];

B=[0;0.5;0;-0.83];

C=[1 0 0 0;0 0 1 0];

D=[0;0];

%C=[1 0 0 0];

%D=0;

length_of_A=length(A)

Cm=ctrb(A, B);

rank_of_Cm=rank(Cm)

```

Om=obsv(A, C)

rank_of_Om=rank(Om)

if rank_of_Cm==length_of_A

    % 設定所需的極點

    dominant_poles=roots(den1);

    desired_poles=[dominant_poles'

9*real(dominant_poles(1))

10*real(dominant_poles(1))]

    % 計算增益K

    K=place(A, B, desired_poles)

    % 計算閉迴路系統狀態空間模表示式

    Ac=A-B*K

    Bc=B

    Cc=C

    Dc=D

else

disp(' cannot use the method of pole placement' )

end

eig_Ac=eig(Ac)

```

程式中 3-5 行是將標準二階系統的阻尼比 $\zeta = 0.6$ 和自然無阻尼頻率 $\omega_n = 3.33\text{rad/sec}$ 轉換成轉移函數表示式。結果為

$$\text{num1} = 1$$

$$\text{den1} = 1.0000 \quad 3.9960 \quad 11.0889$$

7-14 行，是將受控裝置以狀態空間模式表示，並檢查是否可控制的系統(controllable)。結果為

$$\text{length_of_A} = 4$$

$$\text{rank_of_Cm} = 4$$

16-17 行，是將二階系統的極點作為極點安置法的主極點，第三個極點及第四個極點取為距離二階系統的主極點 9 和 10 倍遠處，目的是讓系統性能由二階系統的極點所主宰。結果為 $\text{desired_poles} =$

$$-1.9980-2.6640i \quad -1.9980+2.6640i \quad -17.9820 \quad -19.9800$$

19 行，計算回授增益矩陣 K 值。結果為

$$K = -487.5452 \quad -227.2066 \quad -944.3470 \quad -187.4232$$

21-24 行，極點安置後的狀態矩陣。

$$A_c =$$

0	1.0000	0	0
243.7726	113.6033	471.1935	93.7116
0	0	0	1.0000
-404.6625	-188.5814	-765.8380	-155.5613

Bc =

0
0.5000
0
-0.8300

Cc =

1	0	0	0
0	0	1	0

Dc =

0
0

eig_Ac =

-19.9800

-17.9820

-1.9980 + 2.6640i -1.9980 - 2.6640i

3.3 模型建構與模擬

假設倒單擺初始值為 $x=0.2\text{m}$ ， $\theta =0.1\text{rad}$ ，為了使擺錘保持垂直並且使推車回到 $x=0$ 的參考位置，在 Simulink 所建構的模型如圖 3.1。

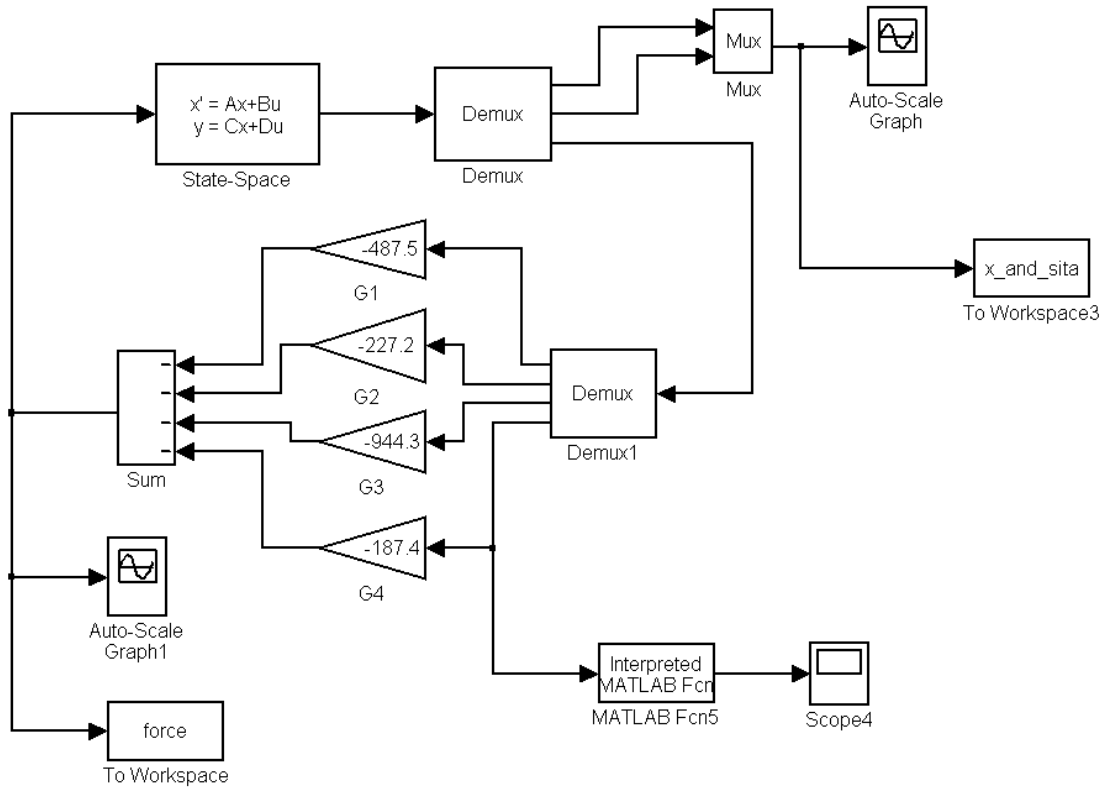


圖 3.1 Simulink 中的倒單擺模型

圖 3.2 為倒單擺模型原始設計的模擬結果。

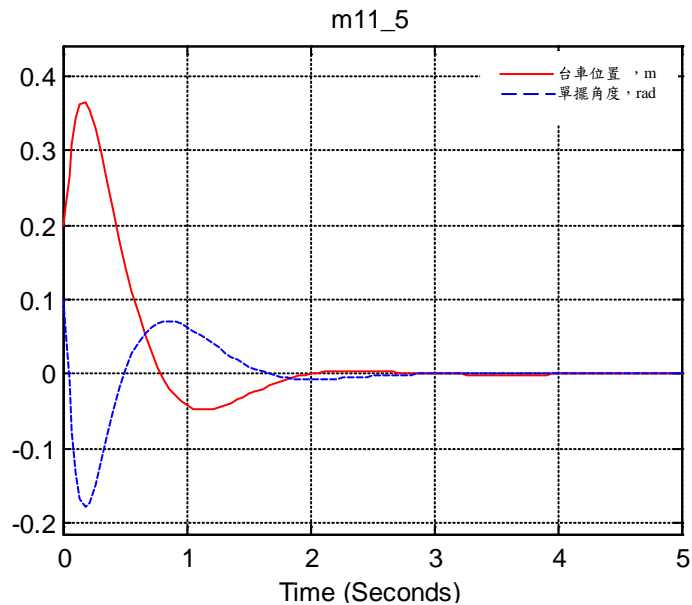


圖 3.2 倒單擺模型的模擬結果

3.4 本文所考慮的三個非線性因素

倒單擺系統的模擬與實驗往往存在可觀的誤差，如文獻[16]的穩定時間，其模擬與實驗的比值約為1：10，本文以模擬的方式，並考慮倒單擺系統的三個非線性現象，控制器的飽和輸出、台車位置和倒單擺的量化誤差、台車驅動機構的齒隙，期望能縮短模擬和實驗的差，最終以模擬代替實驗，節省實驗時間，加快研究速度[19]。

3.4.1 考慮量化誤差的倒單擺模型

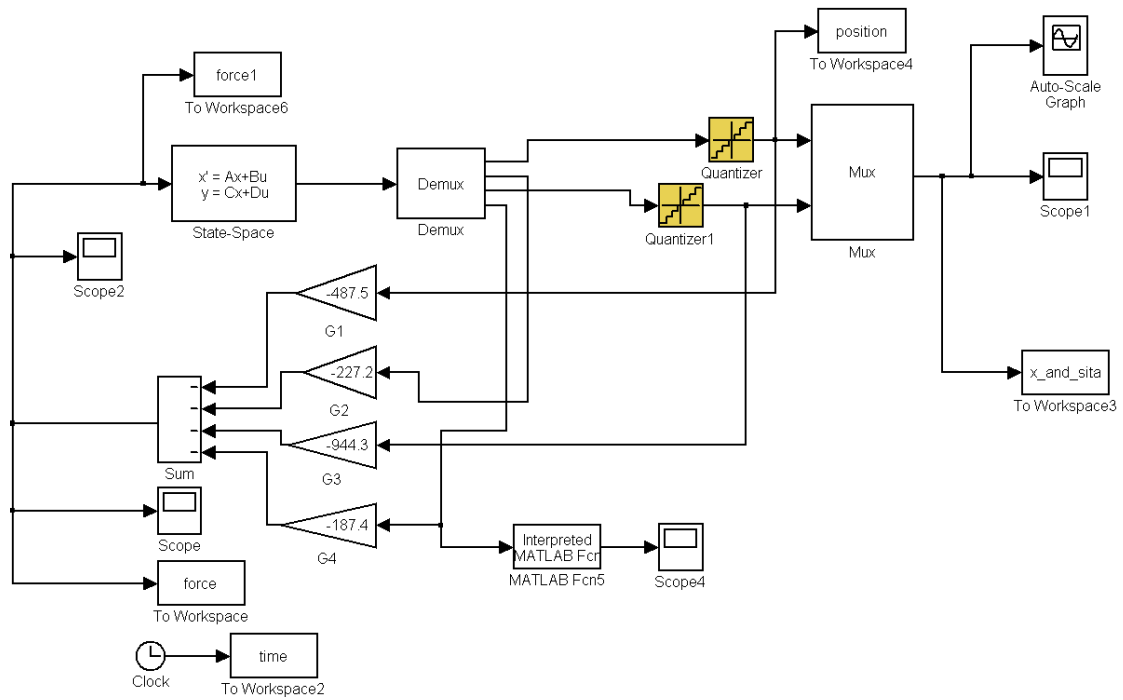


圖 3.3 加入量化誤差元件的倒單擺模型

假設台車位置的解析度為 $X = 1.25 \times 10^{-6}$ m，倒單擺角度的解析度為 $\theta = 0.05^\circ$ ，初始值為 $x = 0.2$ m， $\theta = 0.1$ rad，模擬的結果為圖 3.4

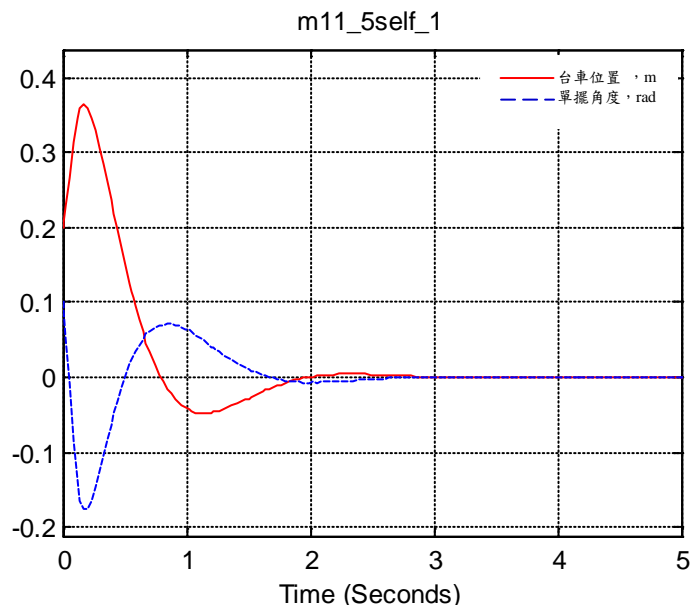


圖 3.4 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 1$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 1$ m

將 x 和 θ 的解析度分別設定為 $\frac{1}{16}$ 倍~16 倍，經過量化誤差模擬實驗

後，歸納出來的統計，如表 3.1 所示，打勾(✓)的區域表示收斂、打圈(○)的區域表示漸進穩定。

表 3.1 量化誤差模擬實驗統計表

$\theta \backslash X$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\frac{1}{16}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{8}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{4}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
1	✓	✓	✓	✓	✓ 圖 3.4	✓	✓	✓	✓
2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
8	✓ 圖 3.7	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓ 圖 3.5
16	○ 圖 3.8	○ 圖 A1	○ 圖 A2	○ 圖 A3	○ 圖 A4	○ 圖 A5	○ 圖 A6	○ 圖 A7	○ 圖 3.6

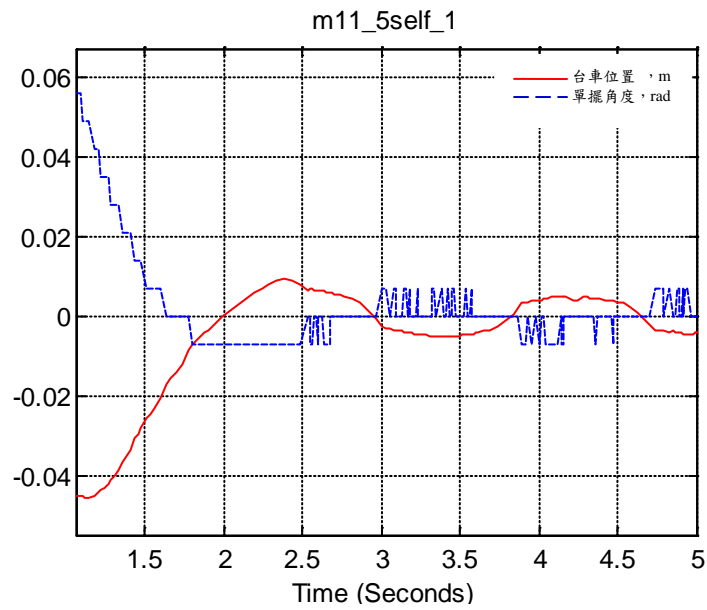


圖 3.5 量化誤差 $\theta=0.05^\circ \times 8$ ， $X=(1.25 \times 10^{-6}) \times 16$ m

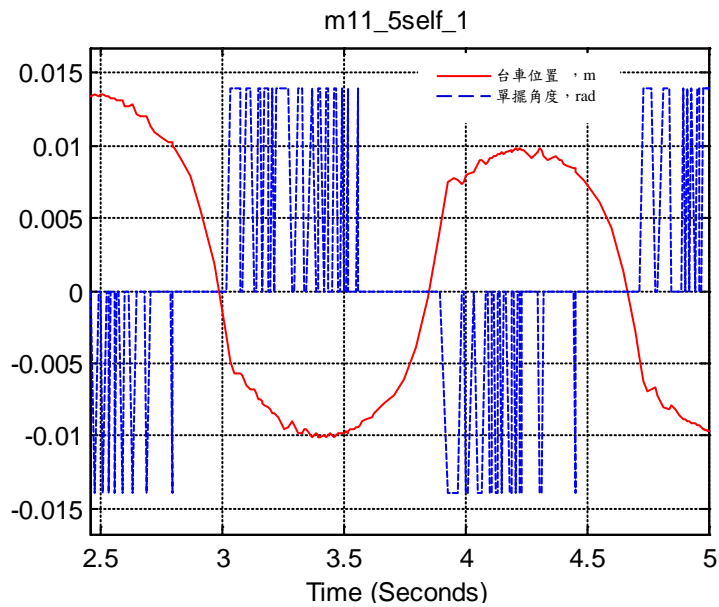


圖 3.6 量化誤差 $\theta=0.05^\circ \times 16$ ， $X=(1.25 \times 10^{-6}) \times 16$ m

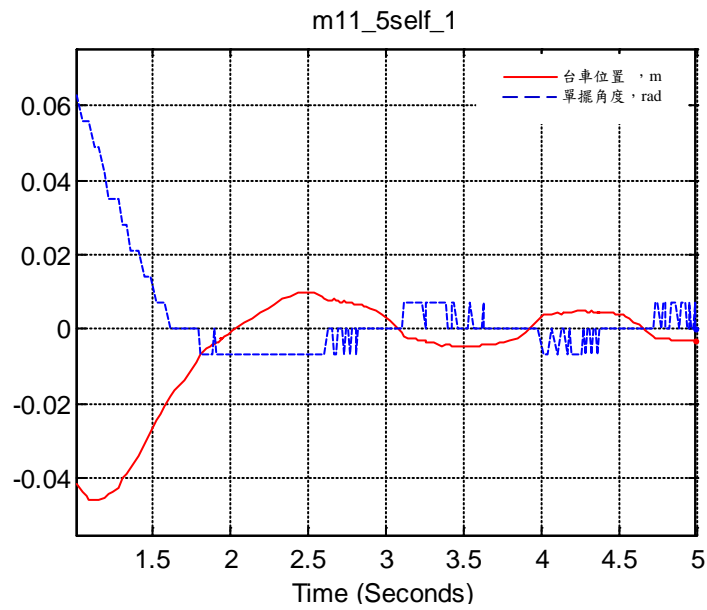


圖 3.7 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 8$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{16}$ m

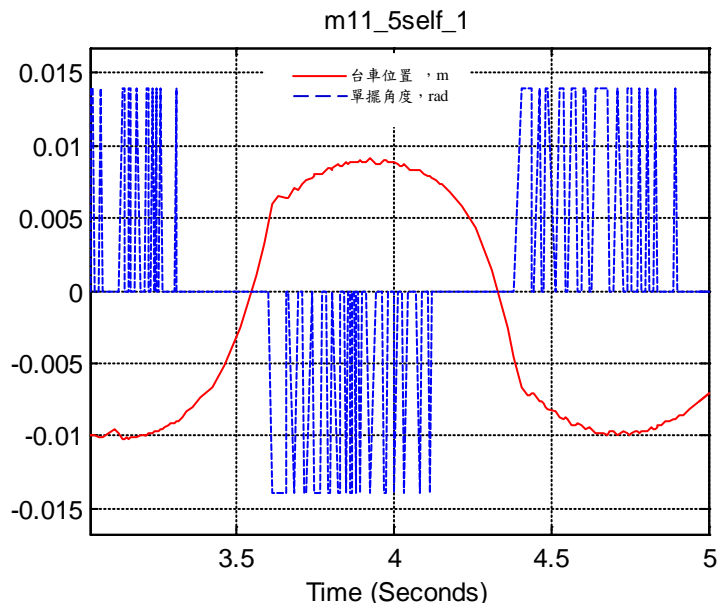


圖 3.8 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{16}$ m

針對量化誤差做研討

本小節針對角度和台車位置的量化誤差做模擬，模擬的結果顯示角度的量化誤差重要性，遠大於台車位置的量化誤差，當角度的量化誤差達到16倍(0.8°)，不論台車位置的量化誤差為何，系統都將成為漸進穩定，因此由表3.1，我們可選擇適當的編碼器作為單擺角度和台車位置的量測元件，降低成本。

3.4.2 考慮控制器飽和輸出、量化誤差後的倒單擺模型

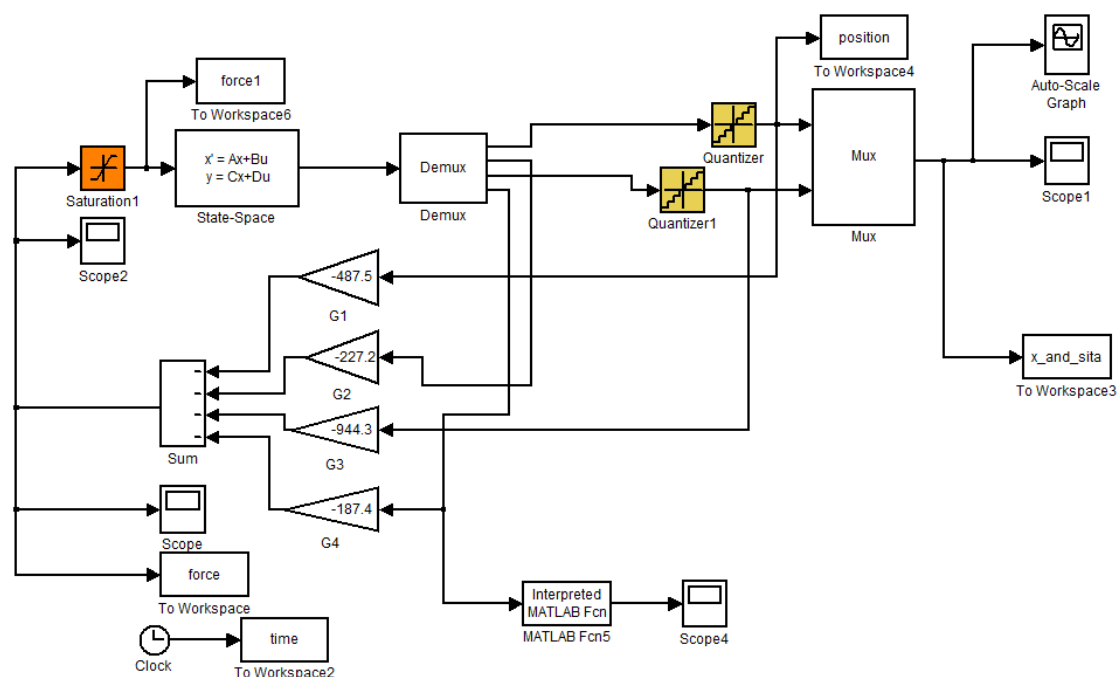


圖 3.9 加入控制器飽和輸出、量化誤差元件的倒單擺模型

本小節針對控制器飽和、角度和台車位置的量化誤差做模擬，控制器的飽和值分別設定為 60nt、50nt、40nt、30nt、25nt、23nt，吾人發現本系統低於 23nt，整體系統將發散，因此本文採用 25nt 做模擬

假設台車位置的解析度為 $X = 1.25 \times 10^{-6}$ m，倒單擺角度的解析度為 $\theta = 0.05^\circ$ ，初始值為 $x = 0.2$ m， $\theta = 0.1$ rad，控制器飽和輸出為 25nt，模擬的結果為圖 3.10

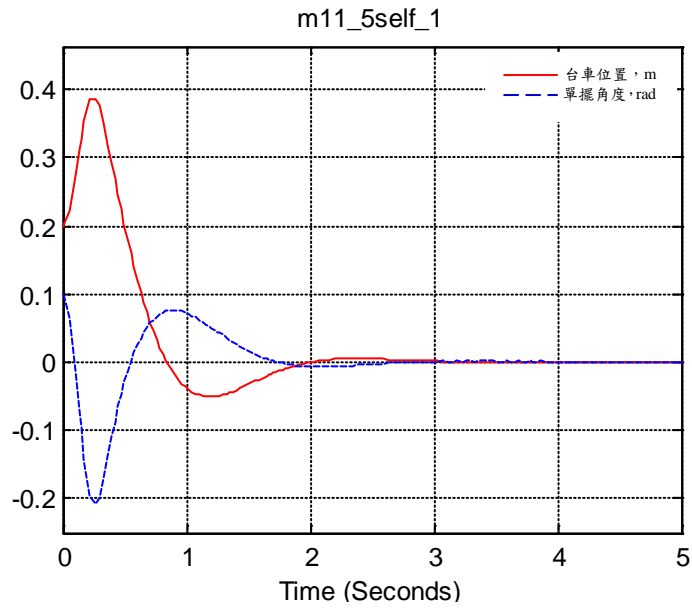


圖 3.10 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 1$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 1$ m

經過控制器飽和元件、量化誤差模擬實驗後，歸納出來的統計，打勾 (✓) 的區域表示收斂、打圈 (○) 的區域表示漸進穩定，如表 3.2 所示：

表 3.2 控制器飽和元件、量化誤差模擬實驗統計表

$\theta \backslash X$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\frac{1}{16}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{8}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{4}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
1	✓	✓	✓	✓	✓ 圖 3.10	✓	✓	✓	✓
2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
8	✓ 圖 3.13	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓ 圖 3.11
16	○ 圖 3.14	○ 圖 A8	○ 圖 A9	○ 圖 A10	○ 圖 A11	○ 圖 A12	○ 圖 A13	○ 圖 A14	○ 圖 3.12

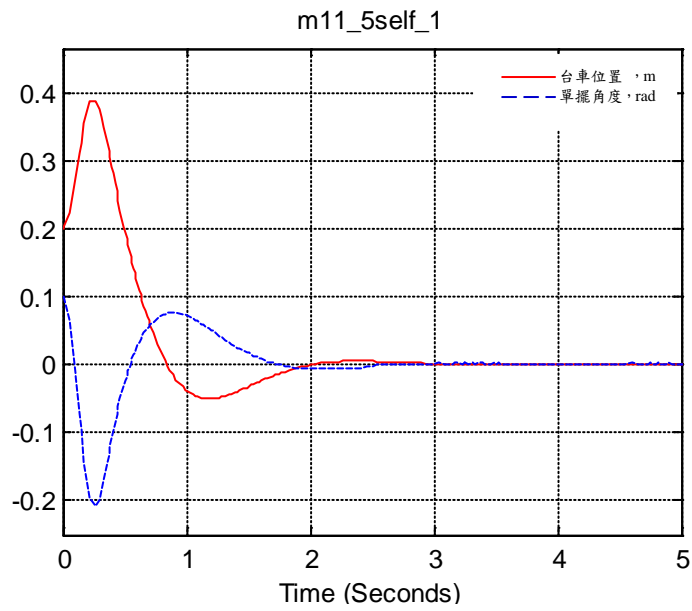


圖 3.11 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 8$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 16$ m

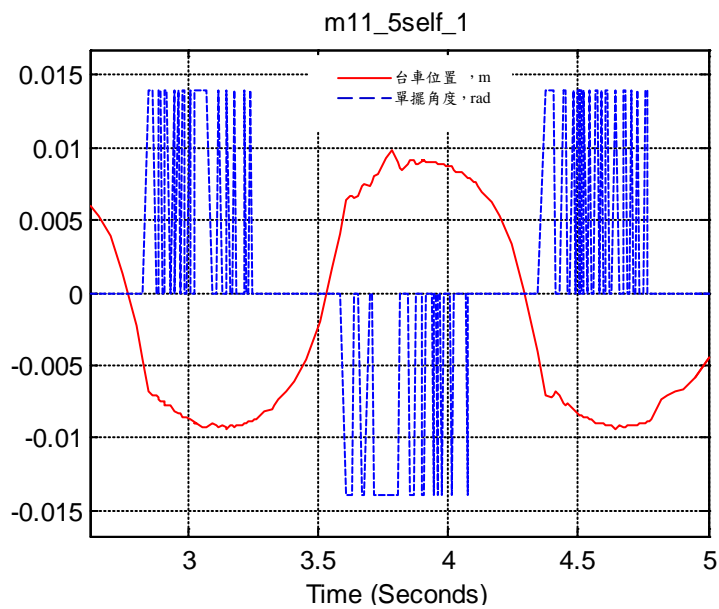


圖 3.12 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 16$ m

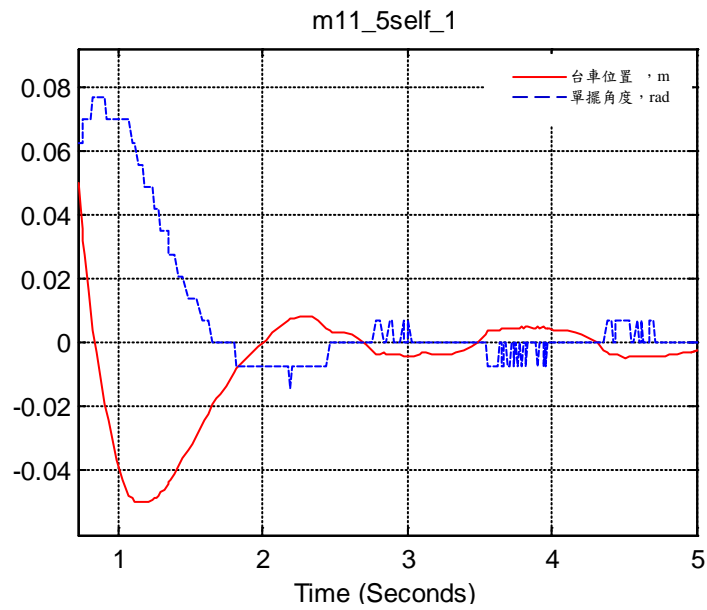


圖 3.13 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 8$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{16}$ m

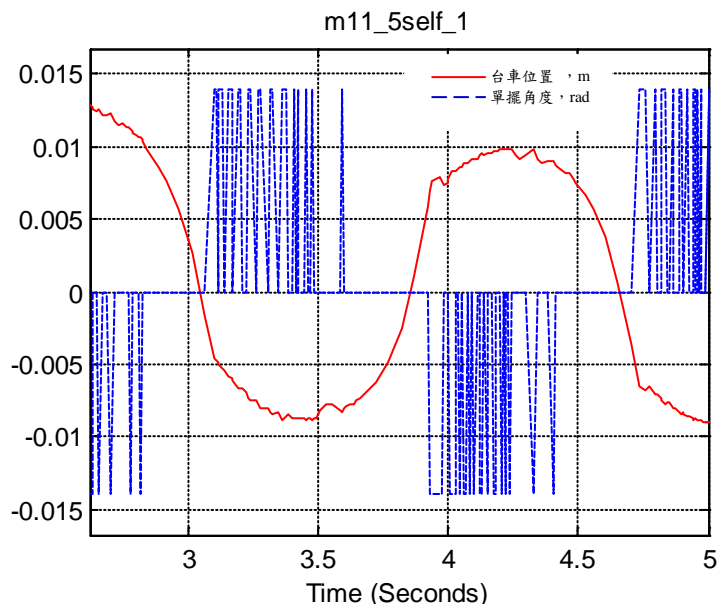


圖 3.14 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{16}$ m

針對控制器飽和、量化誤差做研討

本小節模擬的結果，雖然表 3.2 和表 3.1 完全相同，但比較其細部的響應，例如圖 3.8 和圖 3.14，其量化誤差的設定相同，但響應不同。

3.4.3 考慮台車驅動機構齒隙元件、量化誤差後的倒單擺模型

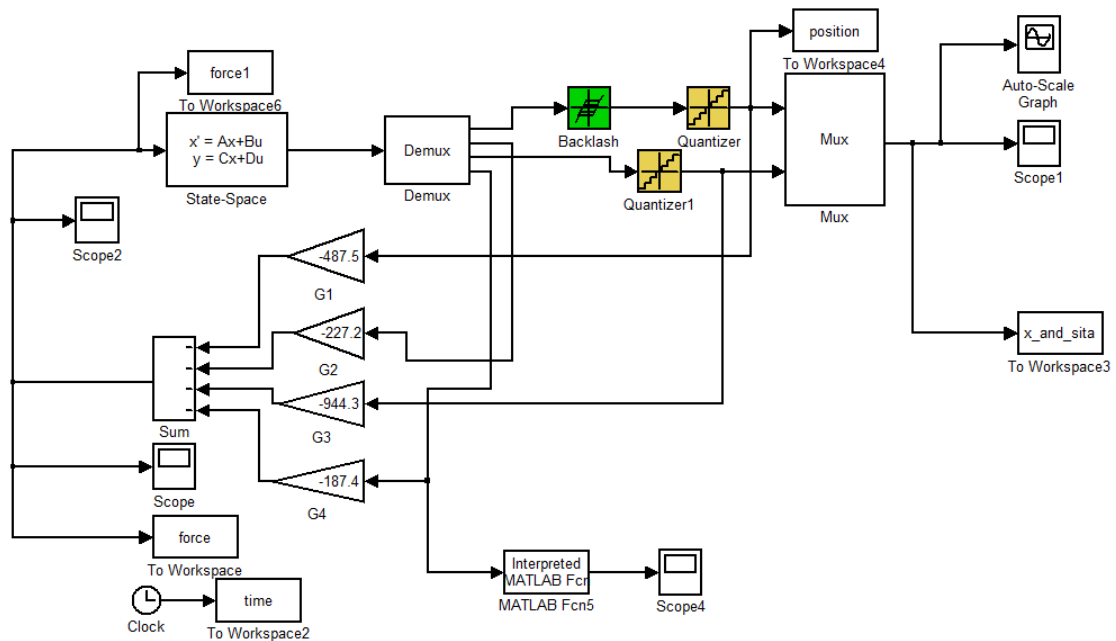


圖 3.15 加入台車驅動機構齒隙元件、量化誤差元件的倒單擺模型

假設台車位置的解析度為 $X = 1.25 \times 10^{-6}$ m，倒單擺角度的解析度為 $\theta = 0.05^\circ$ ，初始值為 $x = 0.2$ m， $\theta = 0.1$ rad，齒隙值設定為台車解析度的 10 倍，即 $1.25 \times 10^{-6} \times 10$ m，模擬的結果為圖 3.16

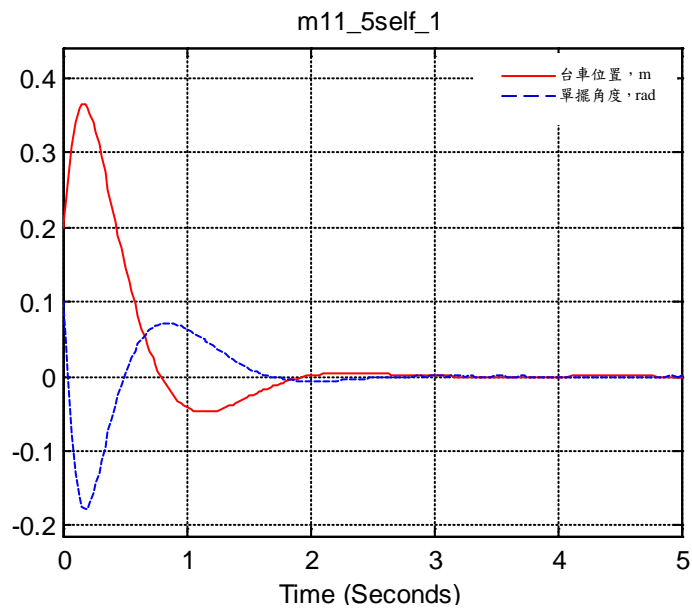


圖 3.16 機構齒隙 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ 、量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 1$

$$, X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 1 \text{ m}$$

經過台車驅動機構齒隙元件、量化誤差元件模擬實驗後，歸納出來的統計，打勾(✓)的區域表示收斂、打圈(○)的區域表示漸進穩定，如表 3.3 所示，齒隙固定為 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ ：

表 3.3 台車驅動機構齒隙元件、量化誤差模擬實驗統計表

$\theta \backslash X$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\frac{1}{16}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{8}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{4}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
1	✓	✓	✓	✓	✓ 圖 3.16	✓	✓	✓	✓
2	✓ 圖 3.17	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓ 圖 3.19
4	○ 圖 3.18	○	○	○	○	○	○	○	○ 圖 3.20
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○
16	○	○	○	○	○	○	○	○	○

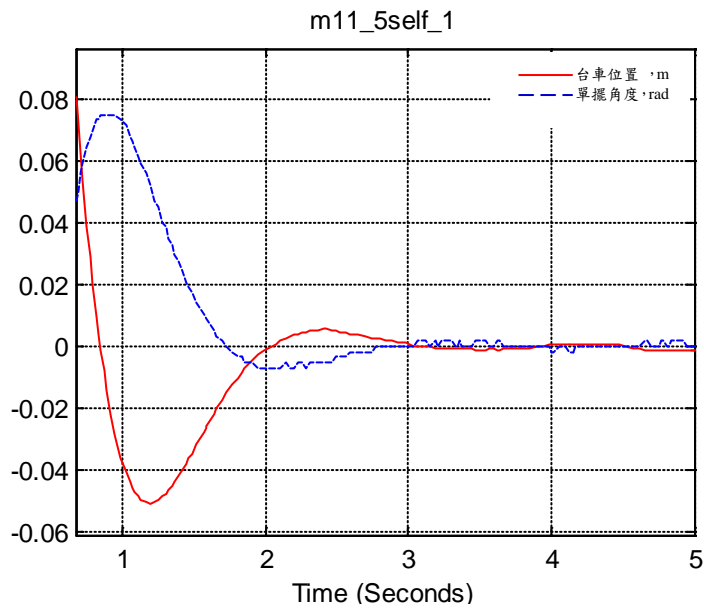


圖 3.17 機構齒隙 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ 、量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 2$

$$\cdot X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{16} \text{ m}$$

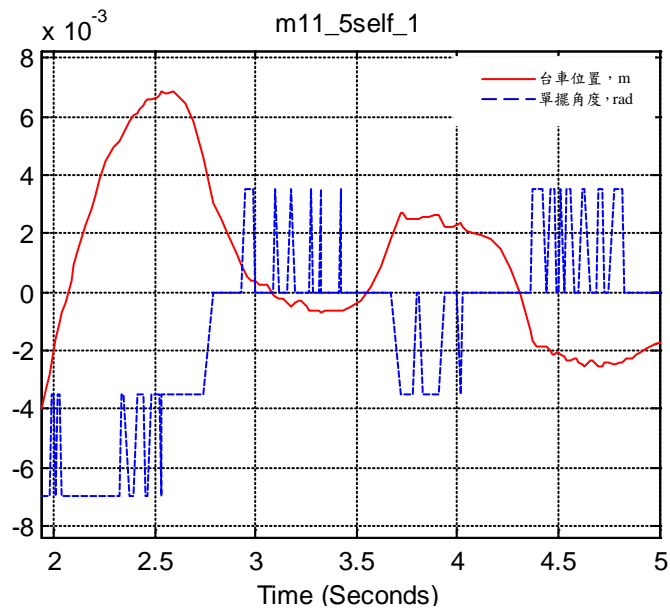


圖 3.18 機構齒隙 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ 、量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$

$$\cdot X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{16} \text{ m}$$

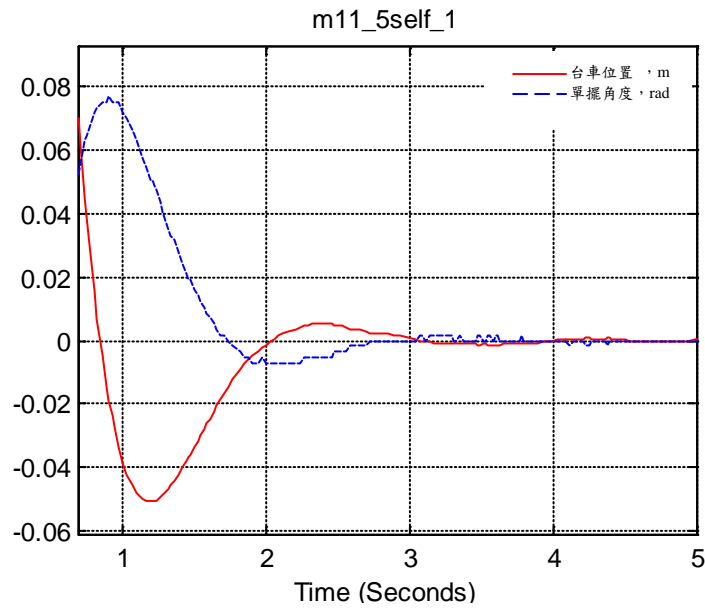


圖 3.19 機構齒隙 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ 、量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 2$

， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 16 \text{ m}$

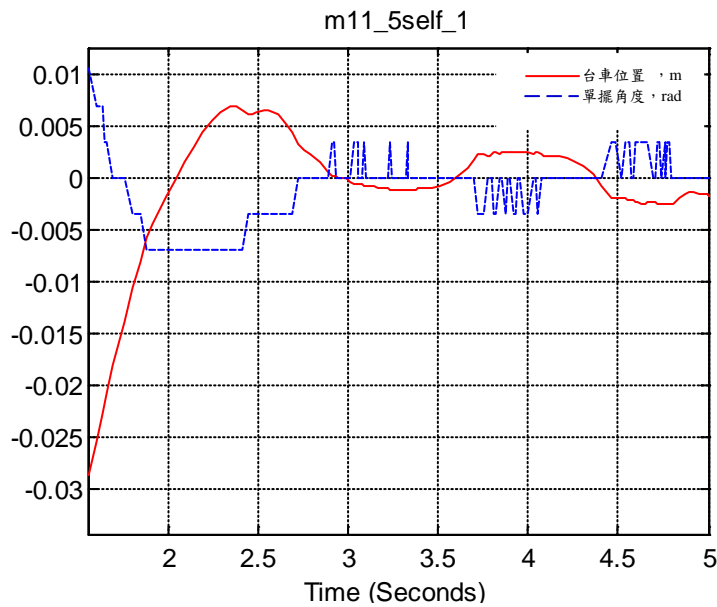


圖 3.20 機構齒隙 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ 、量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$

， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 16 \text{ m}$

針對台車驅動機構齒隙元件、量化誤差做研討

本小節針對台車驅動機構齒隙、量化誤差的影響作模擬，齒隙設定為 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ ，模擬的結果如表 3.4、3.3，和表 3.2 及表 3.1 比較，吾人發現，齒隙確實造成系統劣化，其重要性遠大於控制器飽和及量化誤差，對整個系統的影響力占九成以上，換言之，機械加工精度的重要性不可忽視。

3.4.4 考慮量化誤差、控制器飽和輸出、台車驅動機構齒隙元件後的倒單擺模型

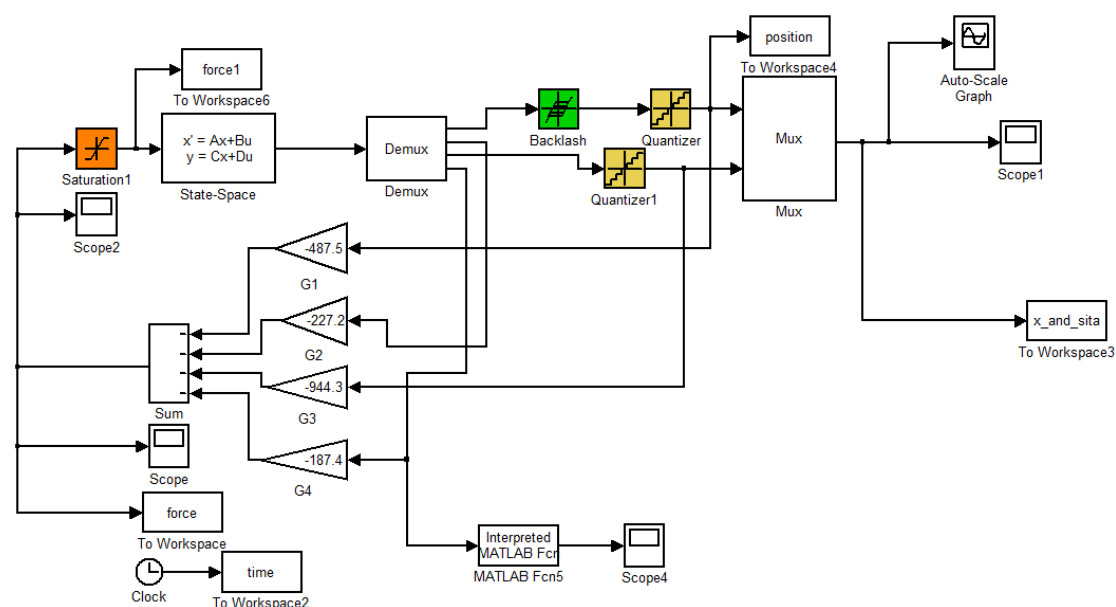


圖 3.21 加入台車驅動機構齒隙元件、量化誤差、控制器飽和輸出的倒單擺模型

假設台車位置的解析度為 $X = 1.25 \times 10^{-6}$ m，倒單擺角度的解析度為 $\theta = 0.05^\circ$ ，初始值為 $x = 0.2$ m， $\theta = 0.1$ rad，控制器飽和為 25nt，齒隙值設定為台車解析度的 10 倍，即 $1.25 \times 10^{-6} \times 10$ m，模擬的結果為圖 3.22

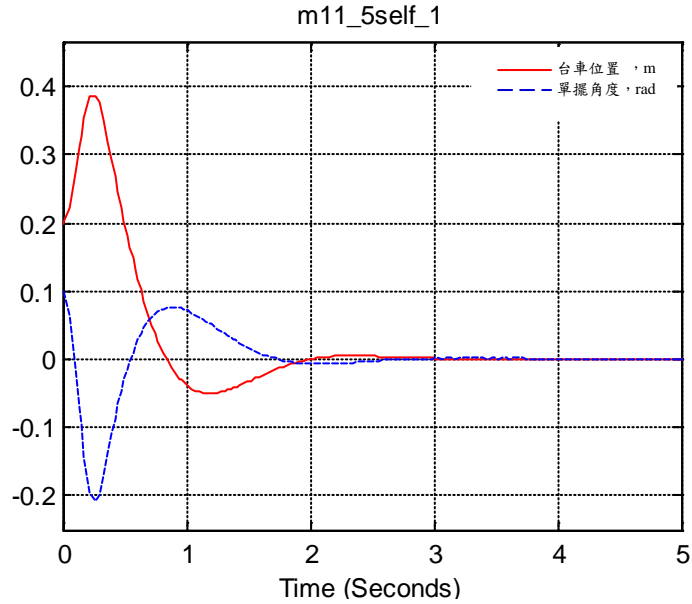


圖 3.22 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 1$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 1$ m，控制器飽和，
25nt，機構齒隙 1.25×10^{-5} m

經過台車驅動機構齒隙元件模擬實驗後，歸納出來的統計，打勾(✓)的區域表示收斂、打圈(○)的區域表示漸進穩定，如表 3.3 所示，齒隙固定為 1.25×10^{-5} m：

表 3.4 台車驅動機構齒隙元件、量化誤差、控制器飽和輸出模擬實

驗統計表

$\theta \backslash X$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\frac{1}{16}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{8}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{4}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$\frac{1}{2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
1	✓	✓	✓	✓	✓ 圖 3.22	✓	✓	✓	✓
2	✓ 圖 3.23	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓ 圖 3.25
4	○ 圖 3.24	○ 圖 A15	○ 圖 A16	○ 圖 A17	○ 圖 A18	○ 圖 A19	○ 圖 A20	○ 圖 A21	○ 圖 3.26
8	○	○	○	○	○	○	○	○	○
16	○	○	○	○	○	○	○	○	○

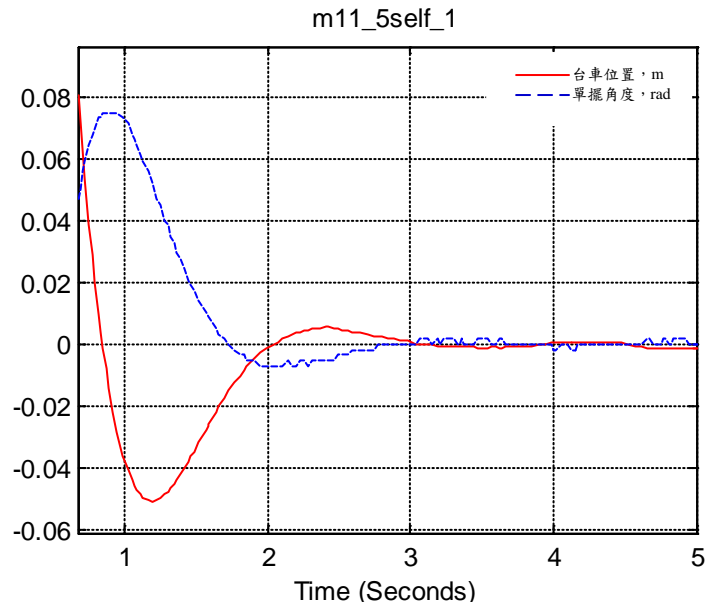


圖 3.23 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 2$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{16}$ m, 控制器飽和, 25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

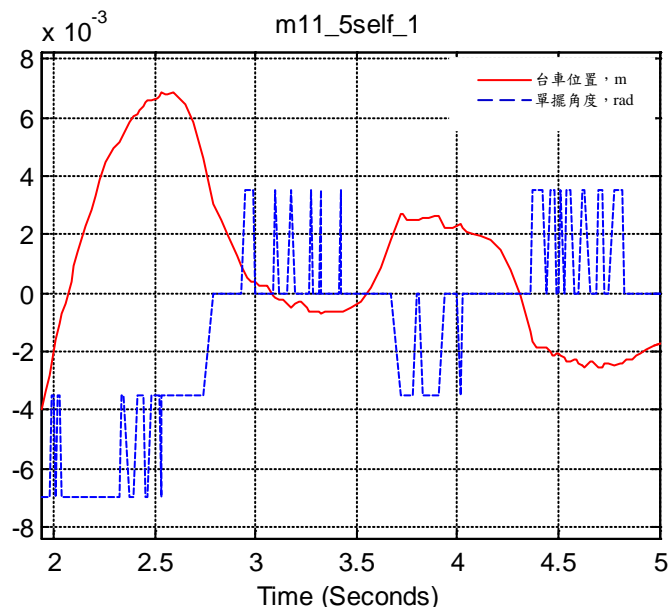


圖 3.24 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{16}$ m, 控制器飽和, 25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

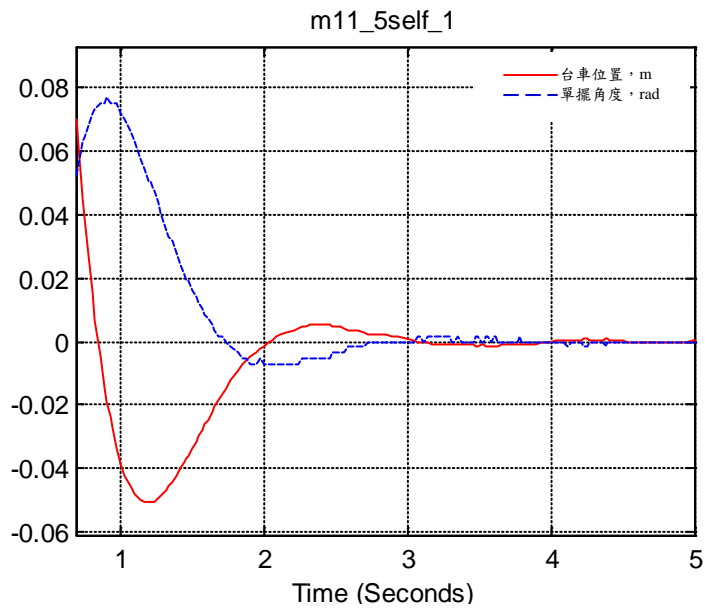


圖 3.25 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 2$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 16$ m, 控制器
飽和, 25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

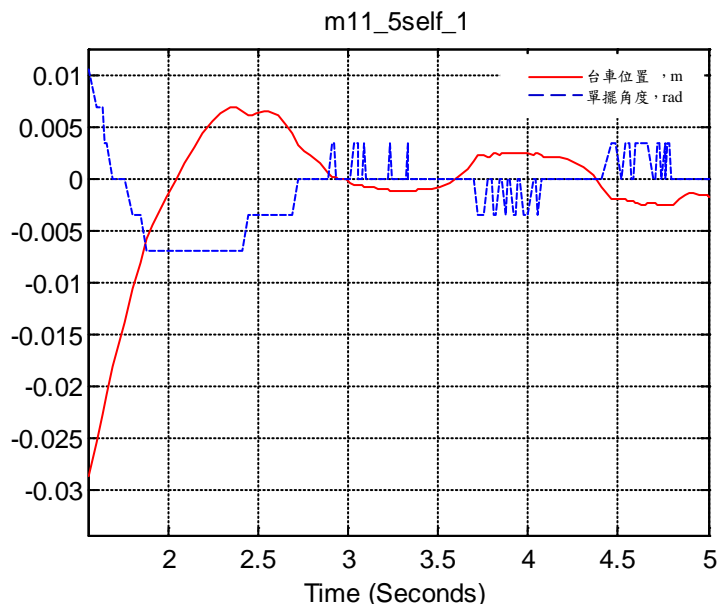


圖 3.26 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 16$ m, 控制器
飽和, 25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

針對台車驅動機構齒隙元件做研討

本小節針對台車驅動機構齒隙的影響作模擬，齒隙設定為 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ ，模擬的結果如表 3.3，和表 3.2 及表 3.1 比較，吾人發現，齒隙確實造成系統劣化，其重要性遠大於控制器飽和及量化誤差，換言之，機械加工精度的重要性不可忽視。

第四章 結論與未來工作

4.1 結論

倒單擺系統為一個不穩定系統，同時具有非極小相位特性，是一個典型的控制題目。由於倒單擺系統機械結構簡單，因此被廣泛的用在驗證各種控制理論與教學上。

本文首先運用牛頓第二定律及對桿子的支點取力矩，推導出倒單擺系統的數學方程式模型。接著利用極點安置設計法，再經過固定增益回授，以得到穩定的閉迴路極點。

模擬時，考慮常見的三個非線性現象，針對角度和台車位置的量化誤差做模擬，結果顯示角度的量化誤差重要性，遠大於台車位置的量化誤差，當角度的量化誤差達到16倍(0.8°)，不論台車位置的量化誤差為何，系統都將成為漸進穩定，因此由表3.1，我們可選擇適當的編碼器，降低成本。針對控制器飽和，飽和值分別設定為60nt、50nt、40nt、30nt、25nt、23nt，吾人發現本系統低於23nt，整體系統將發散，因此本文採用25nt做模擬，模擬的結果為表3.2，雖然和表3.1完全相同，但其細部的響應不同。針對台車驅動機構齒隙的影響作模擬，齒隙設定為 $1.25 \times 10^{-5} \text{m}$ ，模擬的結果如表3.3，吾人發現，齒隙確實造成系統劣化，其重要性遠大於控制器飽和及量化誤差，換言之，機械加工精度的重要性不可忽視。

4.2 未來工作

1. 本文考慮三個常見的非線性現象，除此之外，未來可以加入庫倫摩擦力、磁滯非線性、死區非線性 使模擬結果更接近真實的系統。
2. 利用倒單擺實驗驗證模擬結果。

第五章 參考文獻

- [1] 洪介仁，「車與桿倒單擺系統之平衡控制」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十二年。
- [2] 詹富強，「以數位信號處理器為基礎單版獨立旋轉型倒單擺甩上與平衡控制系統之實現」，國立成功大學工程科學系碩士論文，民國九十三年。
- [3] 范揚欣，「直線倒單擺於斜面甩上及平衡定位控制」，國立台灣科技大學電機工程學系碩士論文，民國九十四年。
- [4] 林群弼，「應用延遲相關穩定性條件於具輸入延遲倒單擺之控制問題」，國立臺灣大學電機工程學系碩士論文，民國九十四年。
- [5] 陳嘉偉，「應用基因演算法於模糊控制器設計之研究」，國立中央大學機械工程學系碩士論文，民國九十四年。
- [6] 李珈松，「車輪式倒單擺平衡 PID 控制」，國立台灣科技大學電機工程學系碩士論文，民國九十四年。
- [7] 簡立杰，「慣性桿倒單擺系統之平衡控制」，國立臺灣大學機械工程學系碩士論文，民國九十五年。
- [8] 葉晉榮，「倒單擺之適應性解耦合控制器設計」，元智大學電機

工程學系碩士論文，民國九十五年。

- [9] 呂育儒，「倒單擺系統模型之建立與控制」，國立臺灣大學機械工程學系碩士論文，民國九十六年。
- [10] 許倩芸，「以等校誤差為基礎之雙輪倒單擺車輛循跡控制」，國立中正大學機械工程學系碩士論文，民國九十七年。
- [11] 葉儒昌，「兩輪倒單擺系統的平衡與軌跡追蹤控制」，國立暨南國際大學電機工程學系碩士論文，民國九十八年。
- [12] 賴彥翔，「粒子群聚最佳化於滑車倒單擺系統之控制」，義守大學電子工程學系碩士論文，民國九十九年。
- [13] Rubí, J., Rubio, Á., Avello, A., “Swing-up control problem for a self-erecting double inverted pendulum,” *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 149, no. 2, pp. 169-175, 2002.
- [14] Cho, H.T., Jung, S., “Balancing and position tracking control of an inverted pendulum on an X-Y plane using decentralized neural networks,” *Proceedings of the 2003 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2003)*, pp. 181-186, Kobe, Japan, 2003.
- [15] Shih, Y. T., “The High Precision Control for a Linear-Motor-Driven Motion Stage with Friction

Compensation” . Doctor Thesis, Department of Mechanical Engineering, National Chiao-Tung University, Hsinchu City, Taiwan, 2004.

- [16] Aguilar-Ibañez, C., Gutiérrez, F. O., Suarez-Castañon, S., “Lyapunov-Based controller for the inverted pendulum cart system,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 40, no. 4, pp. 367-374, 2005.
- [17] Wai, R. J., Chang, L. J., “Adaptive stabilizing and tracking control for a nonlinear inverted-pendulum system via sliding-mode technique,” *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 2, pp. 674-692, 2006.
- [18] 李宜達，「控制系統設計與模擬」，全華科技圖書股份有限公司，民國九十七年。
- [19] 黃淳德，「控制系統工程」，滄海書局，民國九十八年。

附錄一 考慮量化誤差的模擬結果

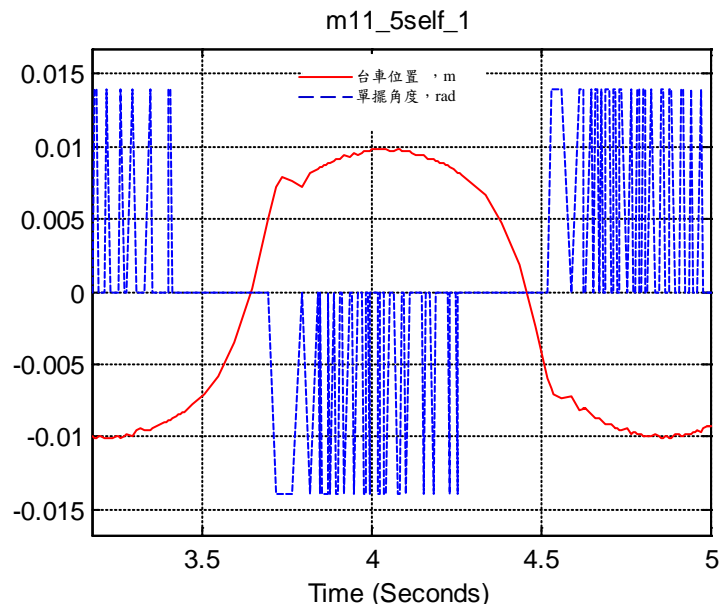


圖 A1 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{5}$ m

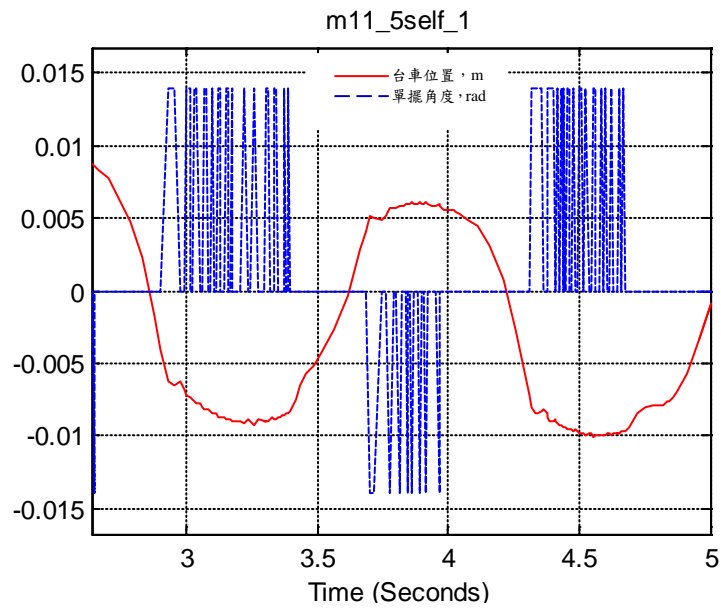


圖 A2 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{4}$ m

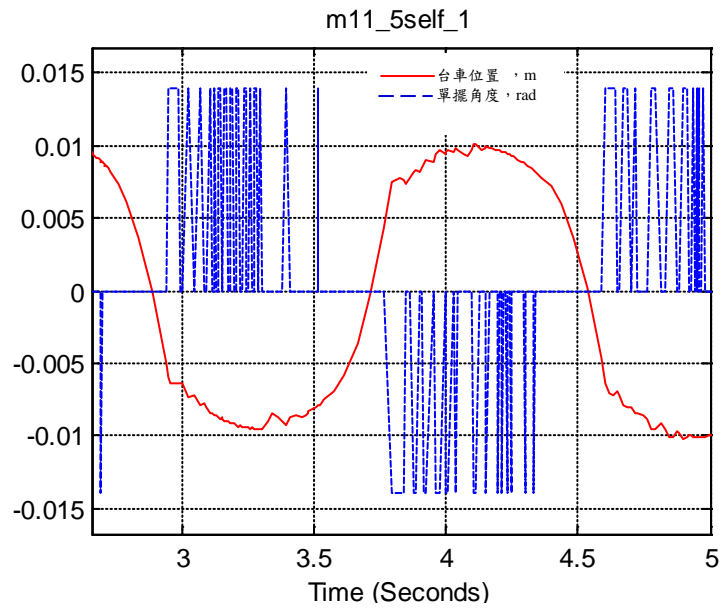


圖 A3 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{2}$ m

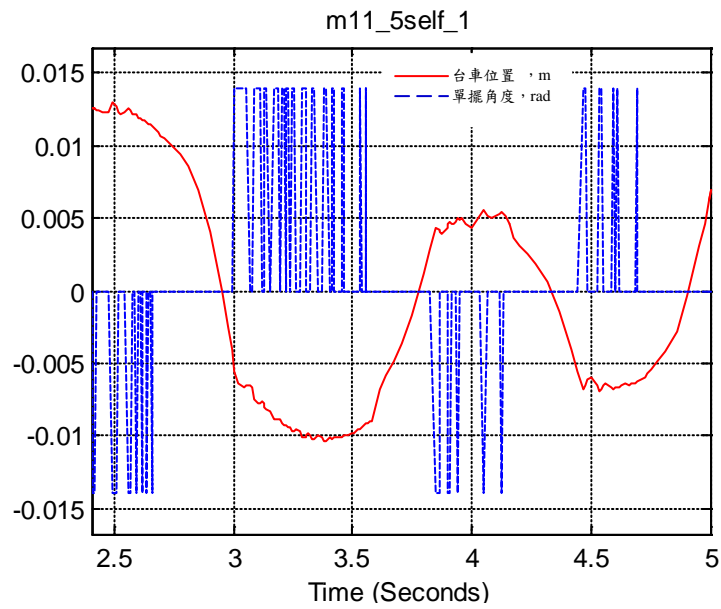


圖 A4 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 1$ m

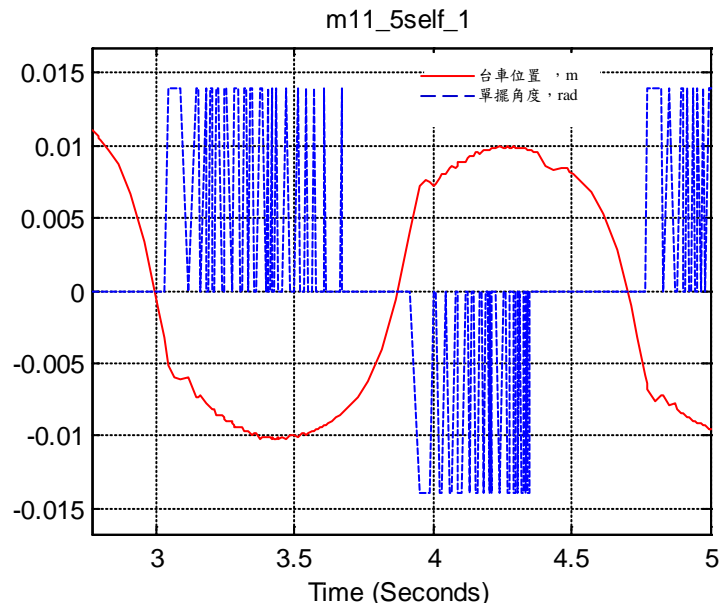


圖 A5 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 2$ m

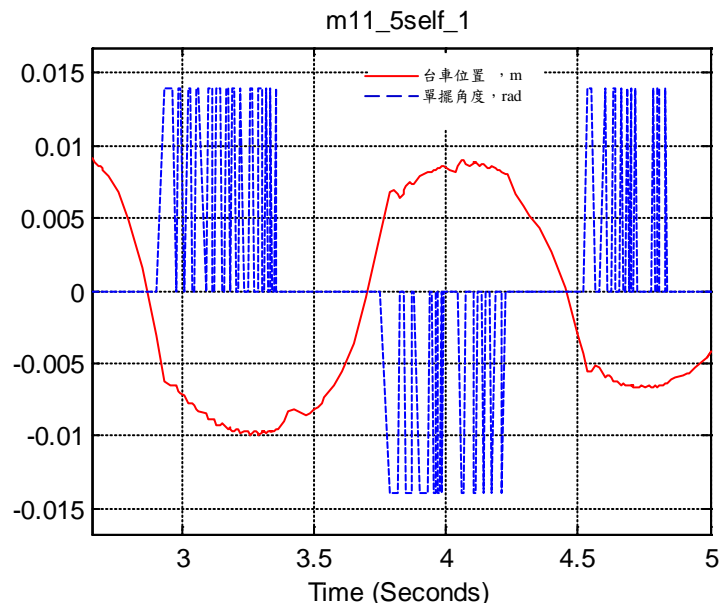


圖 A6 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 4$ m

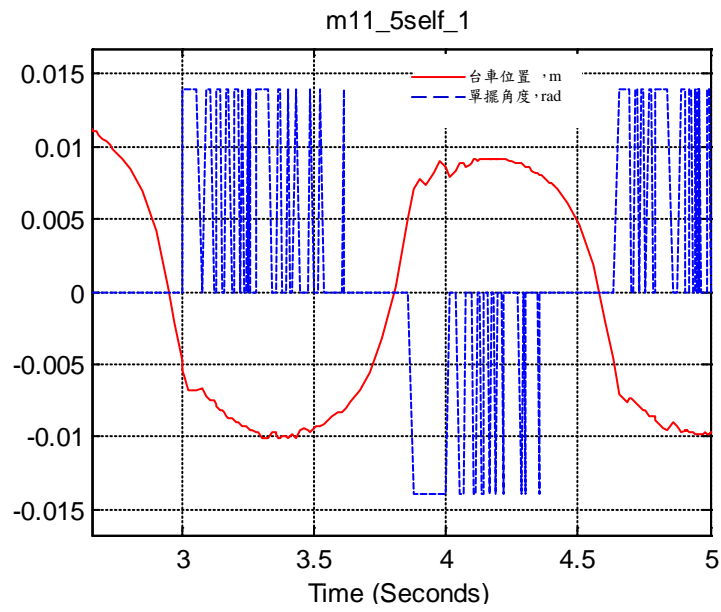


圖 A7 量化誤差 $\theta=0.05^\circ \times 16$ ， $X=(1.25 \times 10^{-6}) \times 8$ m

附錄二 考慮控制器飽和輸出、量化誤差的模擬結果

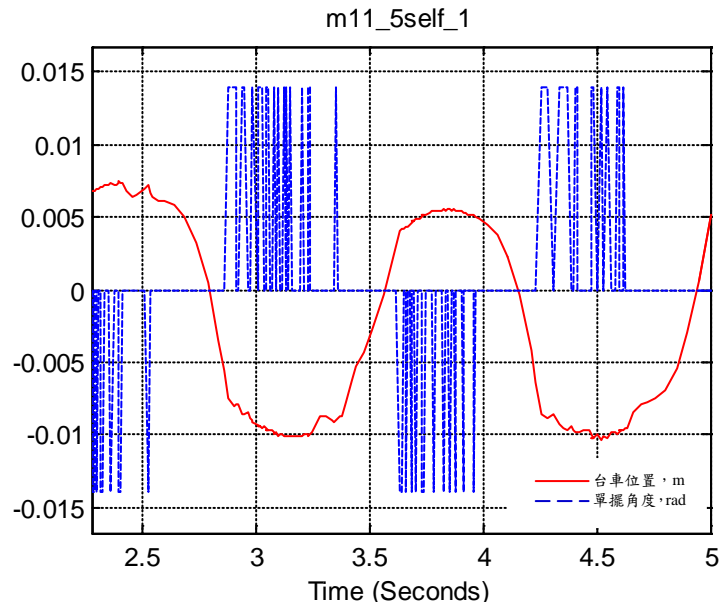


圖 A8 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{8}$ m

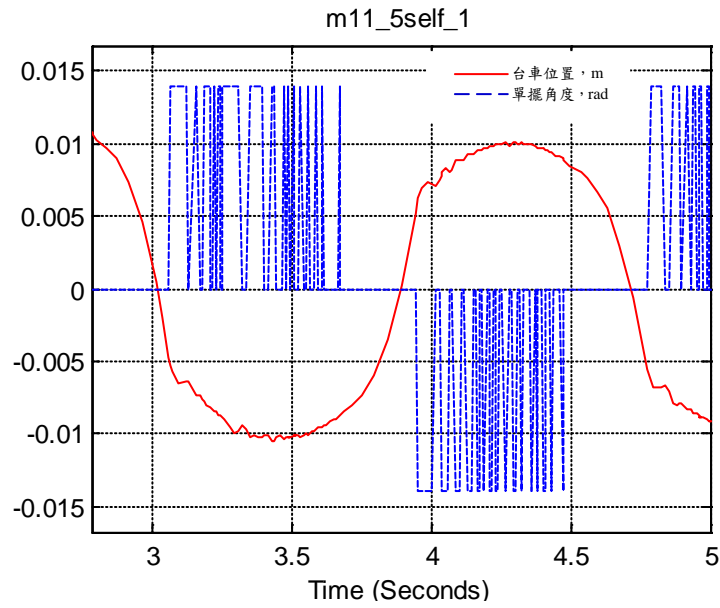


圖 A9 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{4}$ m

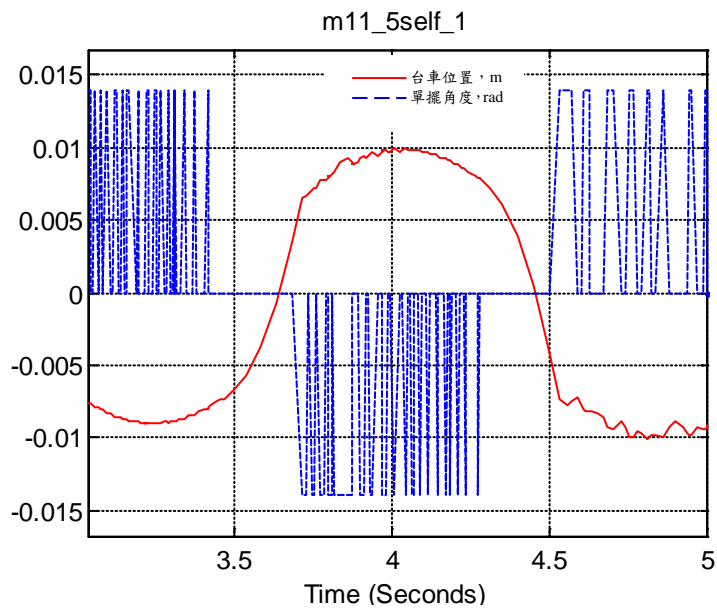


圖 A10 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{2}$ m

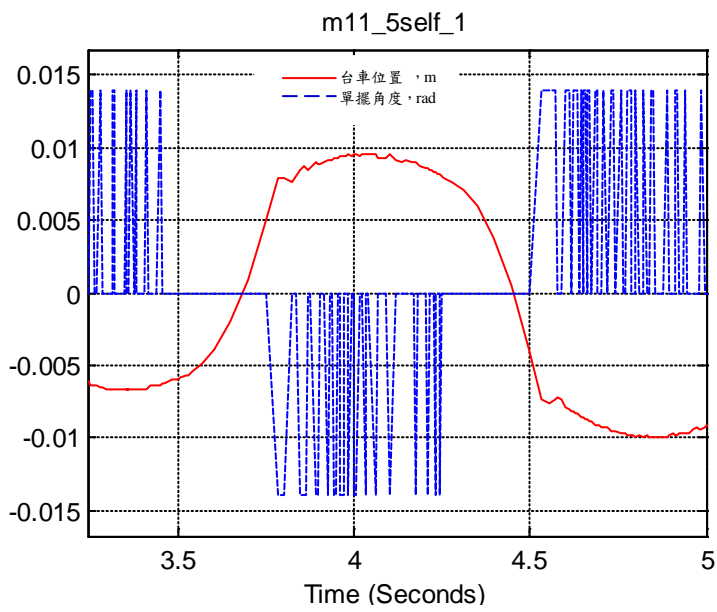


圖 A11 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 1$ m

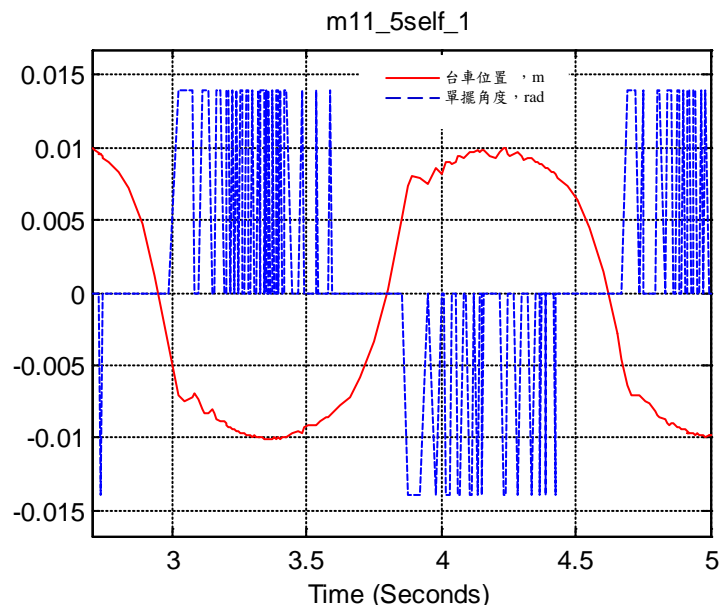


圖 A12 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 2$ m

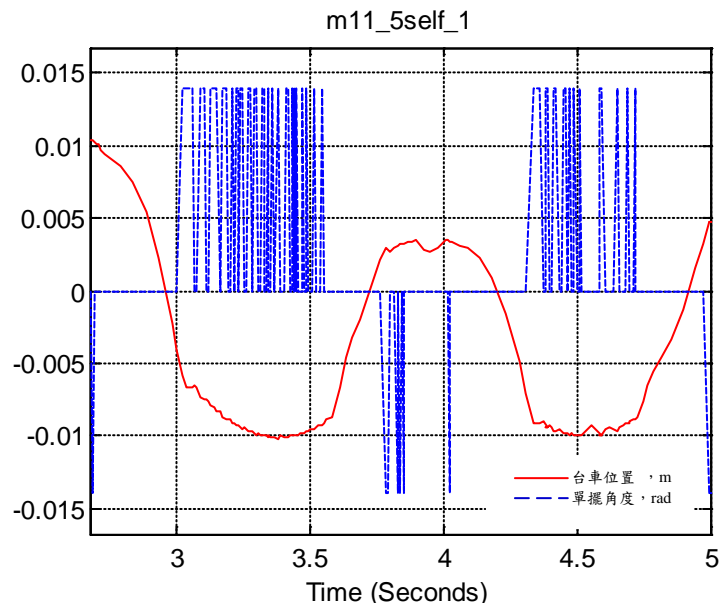


圖 A13 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 4$ m

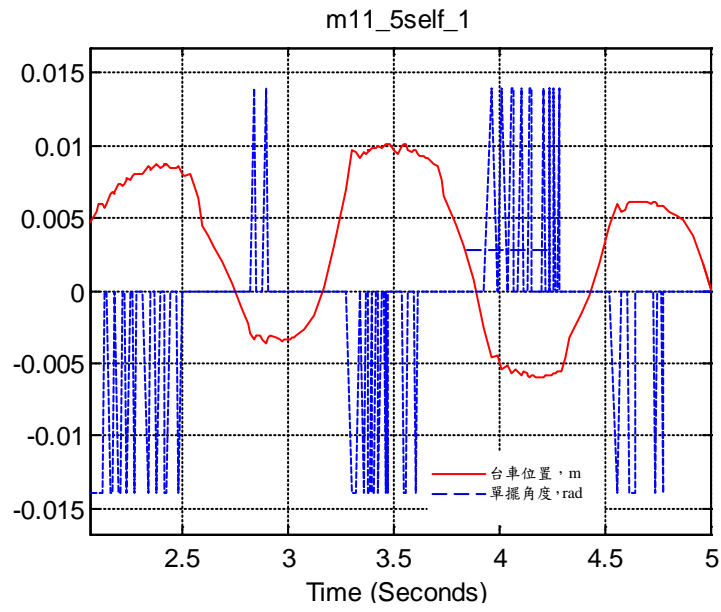


圖 A14 控制器飽和，25nt，量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 16$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 8$ m

附錄三 考慮量化誤差、控制器飽和輸出

、台車驅動機構齒隙的模擬結果

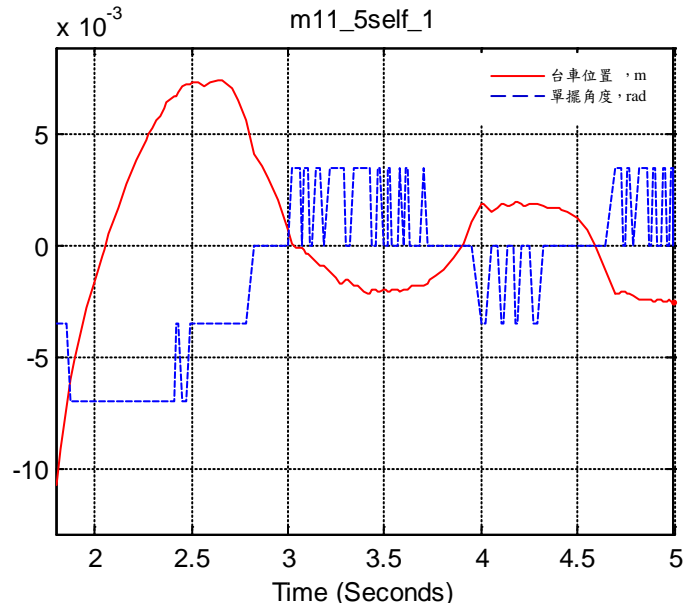


圖 A15 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{8}$ m, 控制器飽和,

25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

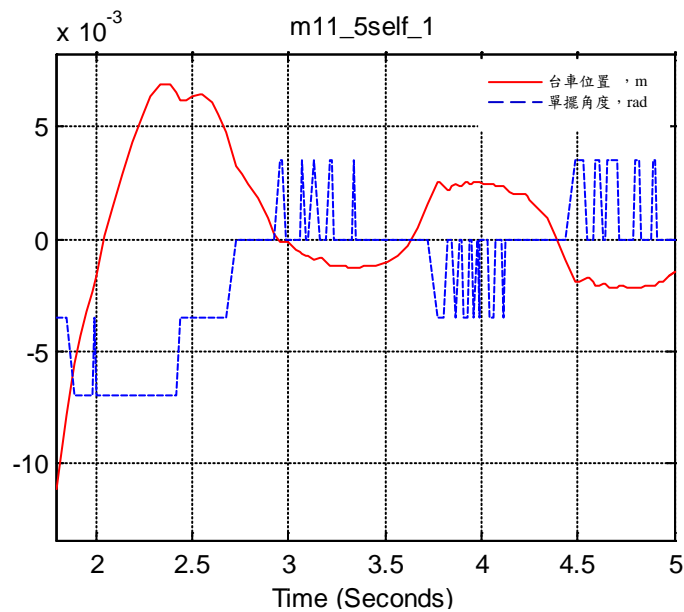


圖 A16 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{4}$ m, 控制器飽和,

25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

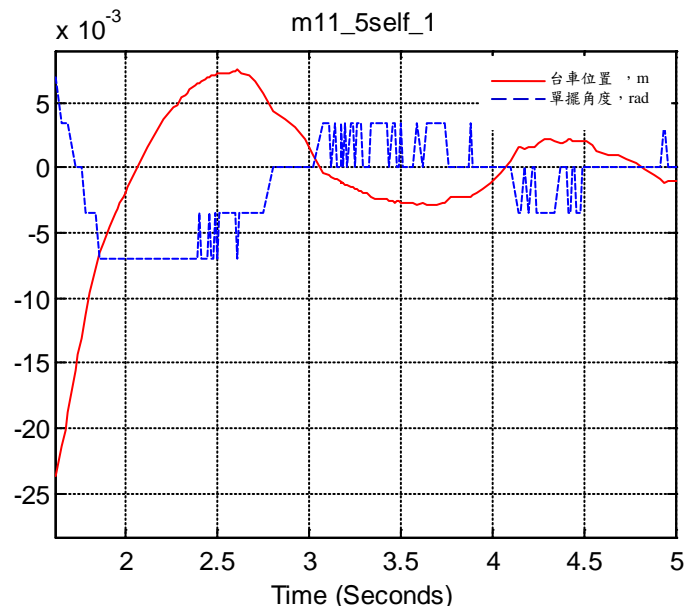


圖 A17 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times \frac{1}{2}$ m, 控制器飽和,

25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

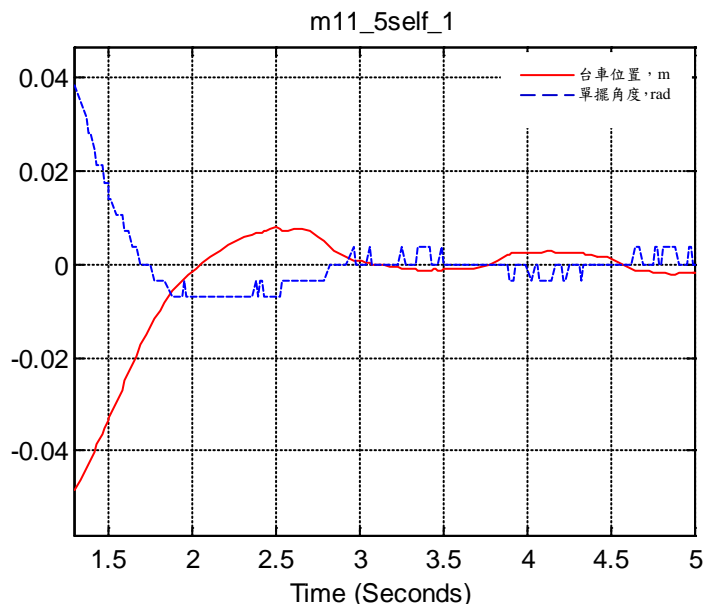


圖 A18 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 1$ m, 控制器飽和,

25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

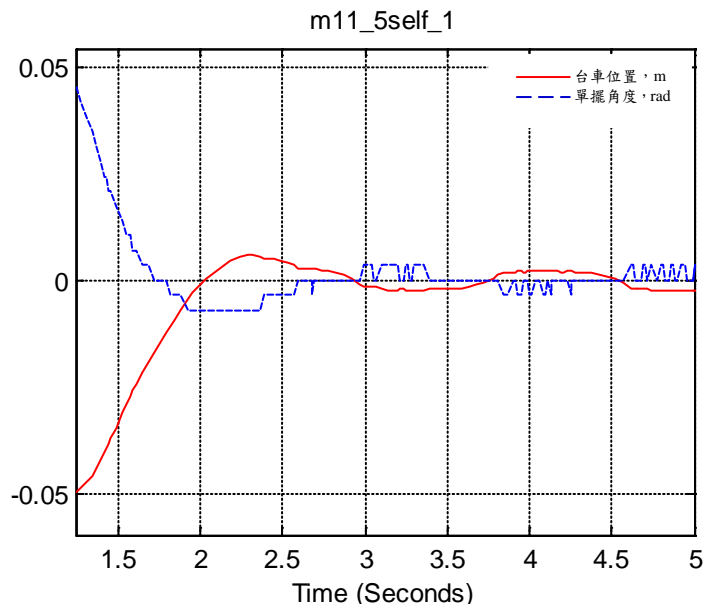


圖 A19 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 2$ m, 控制器飽和, 25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

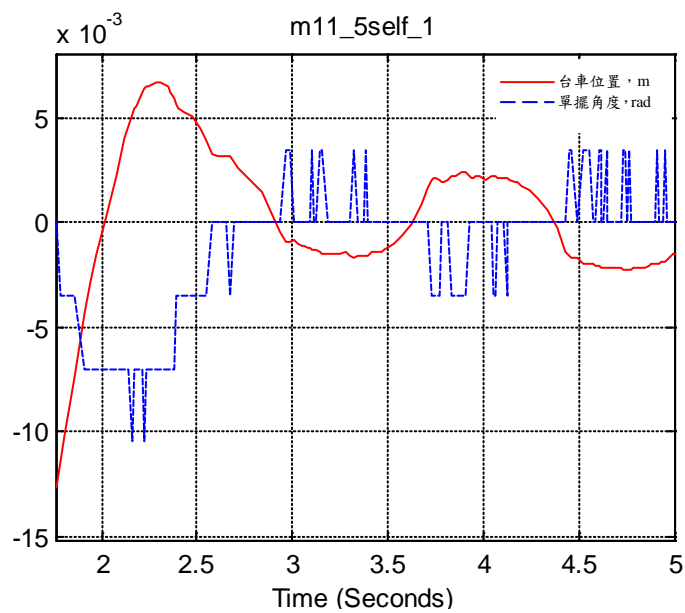


圖 A20 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$, $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 4$ m, 控制器飽和, 25nt, 機構齒隙 1.25×10^{-5} m

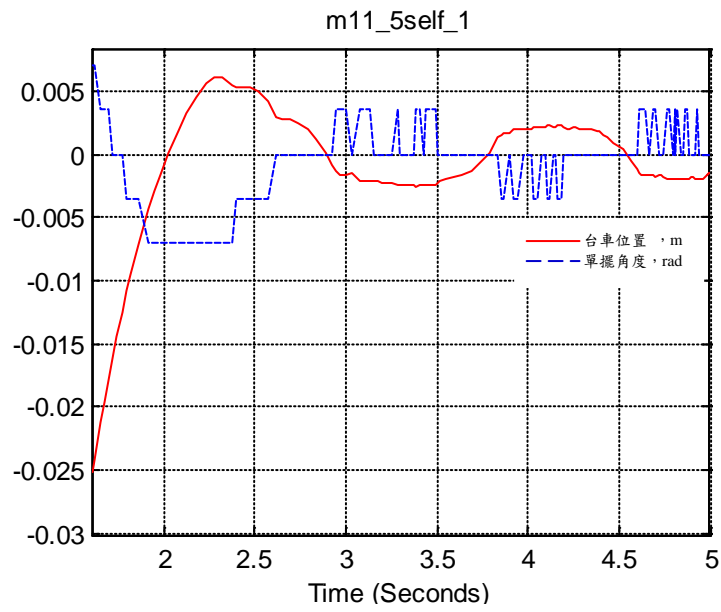


圖 A21 量化誤差 $\theta = 0.05^\circ \times 4$ ， $X = (1.25 \times 10^{-6}) \times 8$ m，控制器飽和，
25nt，機構齒隙 1.25×10^{-5} m