

大華技術學院

機電工程研究所

碩士論文

車輛轉向系統之連續及離散時間

控制器設計研究

研究生：張剛維

指導教授：謝劍書博士

中華民國九十八年七月

摘要

本論文針對車輛轉向系統在鞍節分歧點(saddle-node bifurcation point)上所產生之系統鞍節點分歧現象，提出一有效的連續時間及離散時間控制器設計方法，以消除或延遲此一系統不穩定現象。車輛轉向系統為一多點平衡系統：當系統轉向角度愈大時，系統的鞍點與（穩定）平衡點愈靠近，當轉向角度到達鞍節分歧點時，此時相鄰的鞍點與平衡點將消失，而當超出此一分歧點後，系統將沒有一穩定的平衡點；此時車輛轉向系統的狀態將來回震盪或發散，因而可能導致車輛翻覆。針對此一車輛轉向系統之鞍節點分歧現象，非線性控制方法中之輸入-狀態回授線性化控制(Input-state feedback linearization)被證明能有效的消除或延遲此一系統不穩定現象。本論文之目的即在延續此一非線性控制設計，更進一步提出其一線性非時變控制模型，以降低回授線性化控制所需之複雜計算度。利用最佳化控制理論，我們可以求得此一線性非時變控制之最佳固定增益值(optimal fixed-gain)。另外，我們亦嘗試設計一針對車輛轉向系統控制之離散時間控制方法，以因應現今較實際之數位控制器設計需求。最後，我們利用數值模擬驗證本論文所提出之連續時間及離散時間控制器設計方法之有效性。

誌謝

終於走到了論文完成的這一刻，也完成了人生的一個里程碑，在中間努力的這段日子，有歡笑有鬱悶，這些都將是我美好的回憶。曾經因論文一籌莫展而煩惱，為了論文進度落後而擔心，也有從論文中學到了許多解決問題的方法及道理而滿足，這其中的種種情緒，在這最後一刻，都成為我邁向下一步的動力！十分感謝指導教授謝劍書博士，在這段期間讓我能從多方面學習，並耐心的指導我，在論文無法突破、進度落後時，適時地給予指導，解決無法突破之處，有您的耐心與教導，讓這篇論文順利的完成。其次感謝口試委員廖德誠博士、梁耀文博士及田麗文博士撥冗參與口試並給予本論文指正與建議，使本論文更臻完善。再者感謝何世偉老師、林明漢老師、王惠蓉老師，讓我在做人處事上學習了很多，他們對學生們的照顧，也讓我在研究生的路程變的更豐富。還有感謝我的父母與弟弟，要不是您們在包容與物質上的全力支持，我也無法全力的完成論文，謝謝你們！宜吟，這幾年妳也付出很多，在我心情不好的時後轉移我的注意分享我的感受，寒、暑假都大老遠的來陪我。最後是學校我的同學，宗漢、智鈞、建岷、建宗以及學弟們，謝謝你們，有你們這些朋友真好！

目錄

中文摘要.....	I
誌謝.....	..II
目錄.....	III
表目錄.....	V
圖目錄.....	VI
第一章 簡介.....	1
1.1 動機.....	1
1.2 大綱.....	3
第二章 基礎理論介紹.....	4
2.1 輸入-狀態回授線性化(Input-state feedback linearization).....	4
2.2 四階朗基 - 庫塔數值模擬方法 (Fourth-order Runge-Kutta method)	7
第三章 車輛轉向系統橫向動力學模型與分歧現象分析.....	8
3.1 車輛橫向動力學模型.....	8
3.2 車輛轉向系統鞍節點分歧現象分析.....	11
第四章 車輛轉向系統連續時間控制器設計.....	24
4.1 線性化模型.....	25
4.2 非時變回授線性化控制器設計.....	26
4.3 最佳線性平方控制器(Linear quadratic regulator)設計.....	29

第五章 車輛轉向系統離散時間控制器設計.....	31
5.1 時變離散時間控制器設計.....	31
5.2 非時變離散時間控制器設計.....	32
第六章 模擬與驗證.....	48
6.1 輸入-狀態回授線性化控制器控制成效之數值模擬.....	34
6.2 非時變回授線性化控制器控制成效之數值模擬.....	38
6.3 最佳線性平方控制器控制成效之數值模擬.....	43
6.4 離散回授線性化控制器控制成效之數值模擬.....	44
第七章 結論與未來研究方向.....	49
參考文獻.....	51
附錄 A 線性化模型微分值計算補充.....	53
附錄 B 低摩擦力路面之穩定平衡點與鞍點之詳細數據表.....	55
附錄 C 模擬驗證用 MATLAB 程式.....	61
C.1 程式設計流程圖.....	61
C.2 MATLAB 程式設計.....	63

表目錄

表 3.1 高、低摩擦力路面參數表.....	14
表 3.2 系統平衡點特性表.....	14
表 3.3 不同速度下的最大安全轉向角度範圍.....	15
表 3.4 不同車重下車子的最大安全轉向角度範圍.....	15
表 6.1 時變與非時變離散回授線性化控制效能比較.....	46

圖目錄

圖 3.1 車輛轉向動力學方塊圖.....	10
圖 3.2 等效轉向力特性圖.....	10
圖 3.3 系統在速度 $v=25(m/s)$ 、輸入 $\delta_f=0$ 下之相位描繪圖.....	16
圖 3.4(a) 以鞍點 b 為平衡點所生成線性化系統之相位描繪圖.....	16
圖 3.4(b) 以鞍點 c 為平衡點所生成線性化系統之相位描繪圖.....	17
圖 3.5(a) $v=25m/s, \delta_f=-0.0113$ 系統響應圖.....	17
圖 3.5(b) $v=25m/s, \delta_f=-0.0114$ 系統響應圖.....	17
圖 3.6 系統狀態軌跡圖(低摩擦力路面).....	18
圖 3.7 系統分歧點圖.....	19
圖 3.8 系統分歧點特性.....	19
圖 3.9 $v=25m/s$ 之分歧圖.....	20
圖 3.10 各速度下之分歧圖.....	21
圖 3.11 $v=10\sim 40(m/s)$ 下轉向角之穩定範圍.....	21
圖 3.12 $v=25m/s$ 下高低摩擦力路面之分歧圖.....	22
圖 3.13 相同輸入下, 高低摩擦力路面 β 與 γ 之比較圖.....	23
圖 3.14 高低摩擦力路面之最大安全轉向角度範圍比較圖.....	23
圖 6.1 無施加控制情況下系統發散現象.....	37

圖 6.2 加入回授線性化控制 $(k_1, k_2) = (-0.5, -0.5)$ 後系統收斂.....	37
圖 6.3 加入回授線性化控制 $(k_1, k_2) = (-10, -0.5)$ 後系統收斂.....	37
圖 6.4 加入回授線性化控制 $(k_1, k_2) = (-0.5, -2.5)$ 後系統收斂.....	38
圖 6.5 加入回授線性化控制 $(k_1, k_2) = (-10, -2.5)$ 後系統收斂.....	38
圖 6.6 $(K_1, K_2) = (-2.5, -1.0)$ 與 $(k_1, k_2) = (-0.5, -0.5)$ 之控制效果比較.....	41
圖 6.7 $(K_1, K_2) = (-10., -1.0)$ 與 $(k_1, k_2) = (-10., -0.5)$ 之控制效果比較.....	41
圖 6.8 $(K_1, K_2) = (-2.5, -5.0)$ 與 $(k_1, k_2) = (-0.5, -2.5)$ 之控制效果比較.....	42
圖 6.9 $(K_1, K_2) = (-10., -5.0)$ 與 $(k_1, k_2) = (-10., -2.5)$ 之控制效果比較.....	42
圖 6.10 $K^* = (-0.3774, 0.9787)$ 與 $(k_1, k_2) = (-12.4, -8.9)$ 之控制效果比較...	44
圖 6.11 LQR 與時變離散回授線性化控制之控制效果比較 ($T_s = 0.5$)...	47
圖 6.12 LQR 與時變離散回授線性化控制之控制效果比較 ($T_s = 0.05$)...	47
圖 6.13 LQR 與非時變離散回授線性化控制之控制效果比較 ($T_s = 0.5$)	48
圖 6.14 LQR 與非時變離散回授線性化控制之控制效果比較 ($T_s = 0.05$).....	48

第一章

簡介

1.1 動機

近年來，車輛轉向動力學及其相關控制研究已經成為學術界熱門研究方向之一(請參考文獻[1-6])。而在車輛轉向動力學研究中，最受矚目之一則為安全駕駛的問題，最常見的就是高速過彎時所造成的不穩定現象。由於每天都有大量的交通事故發生，所以探討過彎時前輪轉向角和車輛動力學的非線性反應間的關聯性，變成了一項很重要的研究議題。

分歧理論(bifurcation theory)能有效的應用在非線性車輛動力學之系統穩定性分析[3,7]。其中文獻[7]提出車輛轉向系統的不穩定現象來自於系統發生了鞍節點分歧現象，並推導出鞍節點分歧發生的條件，同時利用 auto 軟體可計算出在不同車輛參數下的鞍節點，並繪製出相對應的分歧圖，由此證實了鞍節點分歧確為造成車輛不穩定的原因，同時也證明了相平面分析在非線性系統穩定性分析上的有效性。文獻[14]則利用相平面分析軟體 PPLANE7 (軟體可由網路自由取得) 來分析車輛轉向系統之穩定性，並藉由分析的過程，幫助初次接觸車輛轉向

系統控制的人更進一步地了解車輛轉向系統的非線性特性。利用此一分析，亦可得到[7]中同樣之結果。

輸入-狀態回授線性化控制(input-state feedback linearization)[8]已經被成功的應用在許多解決非線性控制問題上[9]-[12]，利用輸入狀態的回授，消除了系統的非線性部分。在文獻[9]中，Ha 等人應用回授線性化的技術來調整引擎的輸出扭矩，成功地達到了想要的車輛縱向加速度。在文獻[12]中，Liaw 等人成功的應用回授線性化技術消除車輛轉向系統的非線性部分，穩定了在分歧點上的系統，也因此避開或延遲了系統不穩定現象的發生。文獻[13]對車輛系統之轉向分析與控制設計有非常深入的探討及詳細的說明，

文獻[14]嘗試將文獻[13]中的回授線性化控制器簡單以歐拉前進時間差分法所推導出之離散化方式改寫，利用改寫後所得到的離散回授線性化控制器來控制車輛轉向系統。然而其控制效果不甚理想：離散回授線性化控制器在低速及極小的取樣時間下，可以達到我們想要的控制需求；而在高速及較大的取樣時間下，則無法達到我們想要的控制目的。

本論文延續文獻[14]中之研究結果，嘗試設計針對車輛轉向系統控制之一較有效離散時間控制方法，以因應現今較實際之數位控制器設計需求。另外，本論文亦延續文獻[12,13]中回授線性化控制方法，更

進一步提出其一線性非時變控制模型，以降低回授線性化控制所需之複雜計算度。利用最佳化控制理論，我們可以求得此一線性非時變控制之最佳固定增益值(optimal fixed-gain)。

1.2 大綱

本論文架構如下所述。第一章為本論文的動機及一些相關的文獻探討。第二章介紹相關基礎理論:輸入-狀態回授線性化控制方法，最佳化控制理論，取樣理論，及四階 Runge-Kutta 非線性數值模擬技巧。第三章介紹本論文探討之車輛轉向系統模型及回顧其在鞍點分歧點上所產生之系統鞍節點分歧現象，據以說明本論文所探討之控制問題。為能後續驗證本論文所提出控制方法之有效性，本章將提供車輛系統在不同重量、速度、初始條件(外擾)、路面摩擦力下之最大安全輸入範圍。第四章提出基於輸入-狀態回授線性化控制方法之一線性非時變控制模型，以降低回授線性化控制所需之複雜計算度。另外，將說明如何利用最佳化控制理論，來求出此一線性非時變控制之最佳固定增益值。第五章提出一針對車輛轉向系統控制之離散時間控制方法，以因應現今較實際之數位控制器設計需求。第六章將以數值模擬驗證本論文所提出之連續時間及離散時間控制器之控制效能。最後，在第七章中提出本論文的結論及未來可能的後續研究方向。

第二章

基礎理論介紹

本章對本論文中所用到的輸入-狀態回授線性化控制方法及撰寫模擬程式需使用到的四階朗基-庫塔數值模擬方法等相關基礎理論加以介紹與說明。首先在 2.1 節中介紹本論文所採用的控制方法:輸入-狀態回授線性化控制。其次,在 2.2 節中我們介紹四階朗基-庫塔數值模擬方法之基本原理。

2.1 輸入-狀態回授線性化(Input-state feedback linearization)

假設有一仿射-型式(affine-type)非線性系統如下:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.2)$$

其中 $u \in \mathbb{R}$ 及 $f: D_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和 $g: D_x \rightarrow \mathbb{R}^{n \times p}$ 在 $D_x \subset \mathbb{R}^n$ 域都充分平滑(sufficiently smooth)。如果存在一個 diffeomorphism $T: D_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ 使得 $D_z = T(D_x)$ 包含原點且非線性映射 $z = T(x)$ 將系統(2.2)轉換成下式:

$$\dot{z} = Az + B[\phi^{-1}(x)u - \theta(x)] \quad (2.3)$$

其中, (A, B) 具可控制性, θ 和 ϕ 為純量函數, 且對所有的 $x \in D_x$ 而言, $\phi(x)$ 為非奇異解。定義 $z = T(x)$, 我們可得 $\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x}$, 將(2.2)式代入可得下式:

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + g(x)u] \quad (2.4)$$

比較(2.3)及(2.4)式可得:

$$\frac{\partial T}{\partial x} f(x) = AT(x) - B\theta(x), \quad (2.5a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} g(x) = B\phi^{-1}(x). \quad (2.5b)$$

將矩陣 A 及 B 設為下面控制標準型：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (2.6)$$

我們可將(2.5)式中之右式分別表示如下：

$$AT(x) - B\theta(x) = \begin{bmatrix} T_2(x) \\ T_3(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ -\theta(x) \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad B\phi^{-1}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\phi(x) \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad (2.7)$$

其中， $T(x) = [T_1(x)^T \quad T_2(x)^T \quad \cdots \quad T_n(x)^T]^T$ 。

將(2.5)及(2.7)代入(2.4)，我們可得下式：

$$\frac{\partial T}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial x} [f(x) + g(x)u] = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} f(x) \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} f(x) \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}}{\partial x} g(x) \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) \end{bmatrix}_{n \times 1} u \quad (2.8a)$$

$$= \begin{bmatrix} T_2(x) \\ T_3(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \\ -\theta(x) \end{bmatrix}_{n \times 1} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/\phi(x) \end{bmatrix}_{n \times 1} u \quad (2.8b)$$

比較(2.8a)與(2.8b)式，我們可得到下面關係式：

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} f(x) = T_{i+1}(x), \quad i=1,2,\dots,n-1, \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} f(x) = -\theta(x), \quad (2.9b)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) = 0, \quad i=1,2,\dots,n-1, \quad (2.9c)$$

$$\frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) = \frac{1}{\phi(x)} \neq 0. \quad (2.9d)$$

利用(2.9b)與(2.9d)式，我們可分別得到 θ 及 ϕ 的函式如下：

$$\theta(x) = -(\partial T_n / \partial x) f(x), \quad (2.10a)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{(\partial T_n / \partial x) g(x)}. \quad (2.10b)$$

利用(2.9a)與(2.9c)式，我們可選擇適當的 $T(x)$ 函式（本論文在4.2節中將針對車輛轉向系統詳述如何求取此一 $T(x)$ 函式）。選擇控制器輸出 u 為狀態回授控制，其控制律定義如下：

$$u = \phi(x)(\theta(x) + K \times T(x)), \quad (2.11)$$

其中 K 為常數增益。利用關係 $z=T(x)$ ，我們可將(2.11)式改寫如下：

$$u = \phi(x)(\theta(x) + Kz). \quad (2.12)$$

將(2.12)式代入(2.3)式，我們可得下面線性系統：

$$\dot{z} = (A + BK)z. \quad (2.13)$$

因此，經由(2.3)~(2.13)式的回授線性化程序，我們可將原本的非線性系統(2.2)式轉變成一線性系統模型(2.13)式。

2.2 四階朗基-庫塔數值模擬方法 (Fourth-order Runge-Kutta method)

四階朗基-庫塔法為模擬中最常被使用來解一微分方程之數值解，通稱「RK4」或者就是「朗基-庫塔法」。考慮下面初值問題：

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (2.14)$$

則下一個值(y_{n+1})是由現在值(y_n)加上時間間隔(h)和一個平均斜率的乘積來決定，其數值計算如下：

$$y_{n+1} = y_n + h \times \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{1 + 2 + 2 + 1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.15)$$

其中平均斜率是由以下斜率的加權平均所得： k_1 是初始斜率， k_2 是時間段中點的斜率（採用斜率 k_1 來決定 y 在點 $t_n + \frac{h}{2}$ 的值）， k_3 也是中點的斜率（但是這次採用斜率 k_2 決定 y 值）， k_4 是時間段終點的斜率（其 y 值用 k_3 決定），此四種斜率之計算分別表示如下：

$$k_1 = f(t_n, y_n) \quad (2.16)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (2.17)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (2.18)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3) \quad (2.19)$$

若將上面斜率 k_2 、 k_3 、 k_4 省略，則(2.15)式將簡化為下面歐拉前進時間差分公式：

$$y_{n+1} = y_n + h \times k_1 = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (2.20)$$

第三章

車輛轉向系統橫向動力學模型與分歧現象分析

在本章中，我們針對車輛轉向系統之橫向動力學模型分析其穩定性，並探討在何種條件下，系統會發生側滑角與偏移率持續震盪或發散的不穩定現象。3.1 節介紹本論文所採用的車輛橫向動力學模型 [12]。3.2 節中，我們利用相平面分析軟體來解釋車輛轉向系統之鞍節點分歧現象，並探討其系統穩定性，最後利用分析結果來討論一些參數對車輛轉向控制的影響。

3.1 車輛橫向動力學模型

本論文考慮一個典型的車輛轉向動力學數學模型 [12,13]，其轉向動力學方塊圖如圖 3.1 所示。在圖 3.1 中， v 是縱向加速度， δ_f 為前輪轉向角， β 是側滑角， γ 是偏移率， CG 為車輛重心， L_f 和 L_r 分別為重心和前後輪軸的間距， m 是車輛的重量， I_z 是 z 軸的搖擺力矩， F_{yfl} 、 F_{yfr} 、 F_{yrl} 、 F_{yrr} 分別為左前、左後、右前、右後輪轉向力； F_{xfl} 、 F_{xfr} 、 F_{xrl} 、 F_{xrr} 分別為左前、左後、右前、右後輪牽引力， F_{yfl} 加 F_{yfr} 等於總前輪轉向力 F_{yf} ； F_{yrl} 加 F_{yrr} 等於總後輪轉向力 F_{yr} ； F_{xfl} 加 F_{xfr} 等於總前輪牽引力 F_{xf} ； F_{xrl} 加 F_{xrr} 等於總後輪牽引力 F_{xr} 。若忽略滾動動作，轉向動力學方程式如下式(3.1)~(3.3):

$$m(\dot{v} - v\beta\gamma) = F_{xf} + F_{xr} - F_{yf} \sin\delta_f, \quad (3.1)$$

$$mv(\dot{\beta} + \dot{\gamma}) = F_{yf} + F_{yr} - F_{xf} \sin \delta_f, \quad (3.2)$$

$$I_z \dot{\gamma} = (L_f F_{yf} - L_r F_{yr}) \cos \beta + L_f F_{xf} \sin \delta_f. \quad (3.3)$$

在此我們考慮 $F_{xf} = 0$ 及車輛在無縱向加減速的條件下，且不探討轉向角 δ_f 對速度 v 造成的影響，則(3.1)式在橫向動力學分析上可以被忽略。綜合以上所述，在 $(F_{xf} = 0, F_{xr} = 0)$ 條件下，並假定車輛行駛在固定速度 v 下，我們可將(3.1)~(3.3)式簡化如下：

$$\dot{\beta} = \frac{1}{mv} \{F_{yf} + F_{yr}\} - \dot{\gamma}, \quad (3.4)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{I_z} \{L_f F_{yf} - L_r F_{yr}\} \cos \beta, \quad (3.5)$$

其中， F_{yf} 和 F_{yr} 是 β 、 γ 和 δ_f 的函數，稱為轉向力估測參數。在車輛轉向系統的模擬上，我們採用轉向力跟側滑角、自回正力矩跟側滑角、煞車跟滑移等關係可以符合實驗用輪胎測得數據之魔術法則[2]，做為轉向力估測模型，其數學式如下(3.6)所示（其等效轉向力特性如圖 3.2 所示）：

$$\begin{aligned} F_{yf} &= D_f \sin \left[C_f \tan^{-1} \left\{ B_f (1 - E_f) \alpha_f + E_f \tan^{-1} (B_f \alpha_f) \right\} \right] \\ F_{yr} &= D_r \sin \left[C_r \tan^{-1} \left\{ B_r (1 - E_r) \alpha_r + E_r \tan^{-1} (B_r \alpha_r) \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中， α_f 及 α_r 分別為前後輪的滑角，其數學式可分別表示如下：

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \beta + \tan^{-1} \left(\frac{L_f}{v} \dot{\gamma} \cdot \cos \beta \right) - \delta_f, \\ \alpha_r &= \beta - \tan^{-1} \left(\frac{L_r}{v} \dot{\gamma} \cdot \cos \beta \right), \end{aligned} \quad (3.7)$$

其中， B_f 、 C_f 、 D_f 、 E_f 、 B_r 、 C_r 、 D_r 、 E_r 皆為常數。通常 D_f 及 D_r 是負數， B_f 、 C_f 、 B_r 、 C_r 則皆為正數。

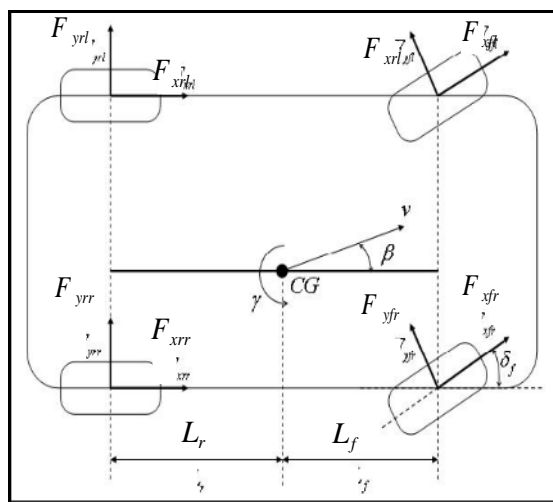


圖 3.1 車輛轉向動力學方塊圖

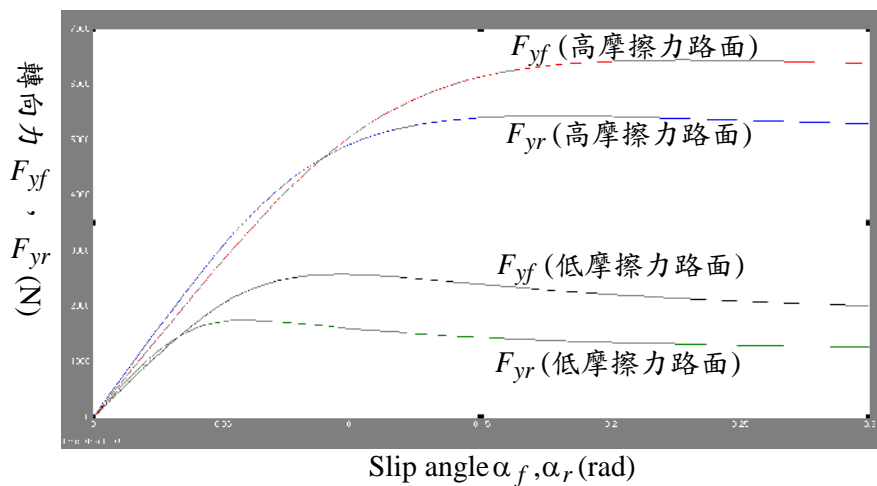


圖 3.2 等效轉向力特性圖

3.2 車輛轉向系統鞍節點分歧現象分析

由於本論文考慮之車輛系統模型為二階非線性系統，因此可透過相平面分析（以數值模擬的方式），進行系統平衡點穩定度的分析，並研究在一些不同的狀況下（如速度不同、車重不同...），系統平衡點及最大安全轉向角度範圍的變化。這裡的最大安全轉向範圍指的是在相平面分析軟體上，逐漸增加輸入（轉向角度）數值（增加到最大正數值或是遞減至最小負數值），仍不致造成系統在分析軟體上找不到穩定平衡點之所有輸入轉向角度所包括的範圍。下面我們將針對 pplane7 相平面分析軟體針對系統(3.4)-(3.5)做相平面分析，模擬使用的參數如表 3.1。（關於 pplane7 軟體操作，請參考文獻[14]之說明）

首先，我們利用 pplane7 軟體，當系統(3.4)-(3.5)在速度 $v=25(m/s)$ ，輸入 $\delta_f=0$ 下，所得到的相位描繪圖如圖 3.3 所示，其中座標 $(x_1, x_2)=(\beta, \gamma)$ 。我們將 (x_1, x_2) 範圍限制在 $(x_1, x_2)=(1, 1)$ 內，可找出系統有三組平衡點： $a(0.000, 0.000)$ 、 $b(-0.0497, 0.0969)$ 、 $c(0.0497, -0.0969)$ ，其中 a 點稱為 Spiral sink，b 及 c 點為 Saddle point。以此三點為平衡點所求得之系統特徵值如表 3.2 中所示，其中系統在 a 點上特徵值為複數特徵值，其實數部分為負數，所以 a 點為穩定螺旋點；b 及 c 點的特徵值為相異符號的實數，所以 b 及 c 點為鞍點。

其次，我們說明系統在 a、b 及 c 點上的穩定性。在 a 點附近只要

不接近 b、c 點且落入 b、c 點穩定流型內，系統的平衡點將趨近 a 點。另外，以 b 及 c 點為平衡點所求得線性化系統之相位描繪圖如圖 3.4(a)、(b)所示。從圖中我們可清楚的看出，只有在 $x_2 = [(-0.95603)/(-0.96161)]x_1$ 這條線上，系統的解才會趨近鞍點。反之，不在線上的部分則其解為無界。因此，我們可求得 b 及 c 點為不穩定鞍點。

接著，我們可利用程式找出系統最大安全轉向角度範圍 (Matlab 程式詳見文獻[14]中附錄 C)。由程式可判定出在 $v=25(m/s)$ 下，當輸入超出 $-0.0113(rad)$ 系統將會不穩定(系統響應如圖 3.5)。另外，我們以相平面分析軟體分析：當輸入為 $-0.0113(rad)$ 及 $-0.0114(rad)$ 時，系統在相平面上有何變化？模擬結果如圖 3.6。由圖中可看出，當輸入為 $-0.0114(rad)$ 時，系統的穩定節點消失，系統呈現不穩定現象。其次，藉由觀察輸入從 $-0.0113(rad)$ 遞減至 $-0.0114(rad)$ 時，系統在相平面上平衡點位置的變化，可找出當輸入為 $-0.0113506835(rad)$ 時，可在相平面上找出一無法被辨識為何種特性的節點(如圖 3.7)。觀察該點的 Jacobin 矩陣(如圖 3.8)，其符合文獻[14]中 3.2.1 中條件 3，因而此點稱為鞍節分歧點(saddle-node bifurcation point)。利用圖 3.7 及鞍節分歧點之對稱特性，我們可求得文獻[7]中系統在速度 $25(m/s)$ 下的分歧圖(bifurcation diagram) (如圖 3.9 所示)，其中藍色實線為穩定的節點，紅色虛線為鞍

點，黑色圓圈則為鞍節分歧點。利用前述鞍節分歧點求取方法及表 3.1 的低摩擦力路面參數，進行速度對車輛行駛穩定度分析之數值模擬。在速度為 15、20、25、30、35、40(m/s)下可繪製出系統的分歧圖如圖 3.10 所示，轉向角的穩定範圍(如表 3.4 及圖 3.11 所示，其中藍色實線所包覆 δ_f 的範圍為轉向角的穩定範圍)。

最後，我們可針對速度、高低摩擦力路面、車重等因素對車輛行駛之穩定度分析結果(請參考文獻[14]之討論)，得到以下之結論：

(1)速度對車輛行駛之穩定度分析：當速度愈快時，車輛轉向系統愈早發生分歧現象，使得系統的穩定結點愈早消失，導致轉向角度的穩定範圍愈小。

(2)高低摩擦力路面對車輛行駛之穩定度分析：在同樣的速度下，車輛轉向系統在低摩擦力路面比在高摩擦力路面更早發生分歧現象(請參考圖 3.12：在速度為 25(m/s)下，車輛行駛在高低摩擦力路面時，車輛轉向系統的分歧圖)；在相同輸入下，車子行走於高摩擦力路面時的側滑角與橫擺率皆遠小於低摩擦力路面(請參考圖 3.13：在相同輸入下，車子行走於低摩擦力路面與高摩擦力路面及在不同速度下，車子的側滑角與橫擺率的比較)；高摩擦力路面的最大安全轉向範圍高於低摩擦力路面的最大安全轉向範圍(請參考圖 3.14：在不同速度下，高低摩擦力路面所能產生之最大安全轉向範圍)。綜合上述，低摩擦力路面對

車輛行駛之穩定度影響高於高摩擦力路面所產生之結果。

(3)車重對最大安全轉向範圍之影響分析：當車身愈重時，最大安全轉向角度範圍也愈小。

表 3.1 高、低摩擦力路面參數表

參數	值/單位	參數	高摩擦力路面	低摩擦力路面
M	1500kg	B_f	6.7651	11.275
L_f	1.2m ²	C_f	1.3	1.56
L_r	1.3m	D_f	-6436.8	-2574.7
I_z	3000kg·m ²	E_f	-1.999	-1.999
		B_r	9.0051	18.631
		C_r	1.3	1.56
		D_r	-5430	-1749.7
		E_r	-1.7908	-1.7908

表 3.2 系統平衡點特性表

	Jacobian Matrix	Eigenvalues	Eigenvectors
a	$\begin{bmatrix} -2.5637 & -0.98745 \\ 3.9221 & -2.0154 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.2896+1.9488i \\ -2.2896-1.9488i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.062479-0.4441i & -0.8938 \\ -0.062479+0.4441i & -0.8938 \end{bmatrix}$
b	$\begin{bmatrix} -0.9284 & -1.0379 \\ -11.8556 & -0.67485 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4.3118 \\ 2.7086 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.29328 & -0.95603 \\ 0.27443 & -0.96161 \end{bmatrix}$
c	$\begin{bmatrix} -0.9284 & -1.0379 \\ -11.8556 & -0.67485 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4.3118 \\ 2.7086 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.29328 & -0.95603 \\ 0.27443 & -0.96161 \end{bmatrix}$

表 3.3 不同速度下的最大安全轉向角度範圍

$v(m/s)$	δ_f 穩定範圍
10	± 0.0568
15	± 0.026
20	± 0.0158
25	± 0.0113
30	± 0.0089
35	± 0.0076
40	± 0.0067

表 3.4 不同車重下車子的最大安全轉向角度範圍

$v=30(m/s)$					
M	最大安全 δ_f 值	穩定節點		鞍點	
		β	γ	β	γ
M_b	-0.0089	0.0249	-0.0593	0.0294	-0.0664
$1.5M_b$	-0.0072	0.0248	-0.0384	0.0289	-0.0429
$2M_b$	-0.0064	0.0252	-0.0288	0.0280	-0.0311
$2.5M_b$	-0.0059	0.0249	-0.0227	0.0279	-0.0247
$3M_b$	-0.0056	0.0256	-0.0192	0.0269	-0.0200

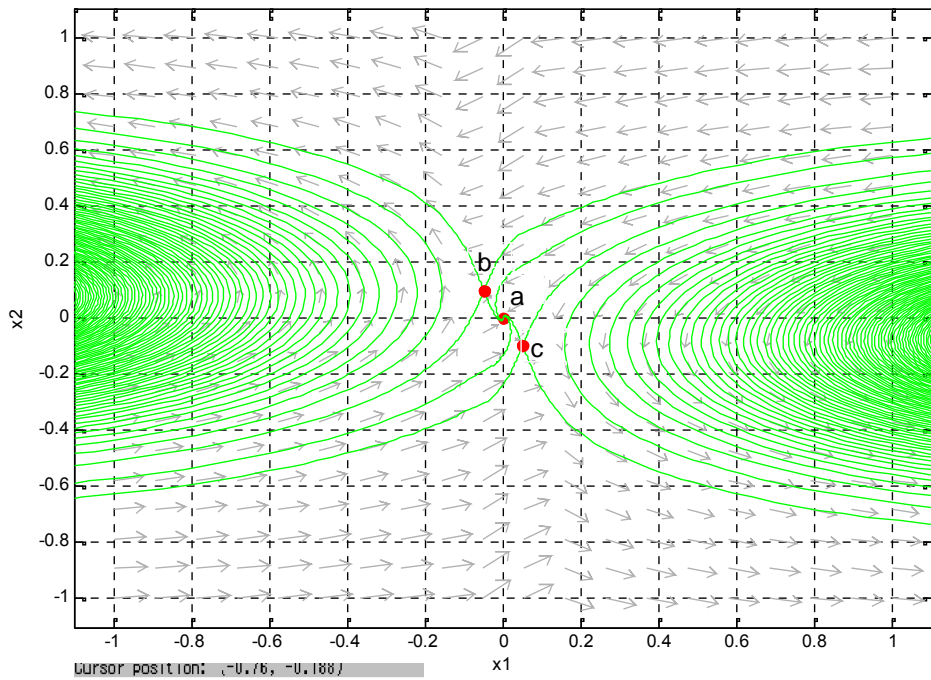


圖 3.3 系統在速度 $v=25(m/s)$ 、輸入 $\delta_f=0$ 下之相位描繪圖

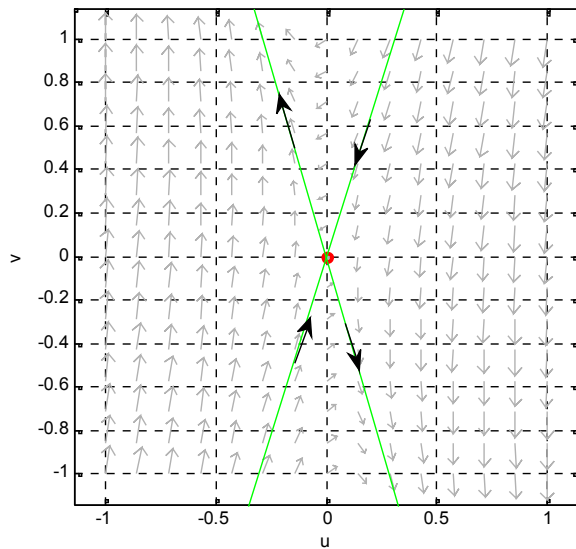


圖 3.4(a) 以鞍點 b 為平衡點所生成線性化系統之相位描繪圖

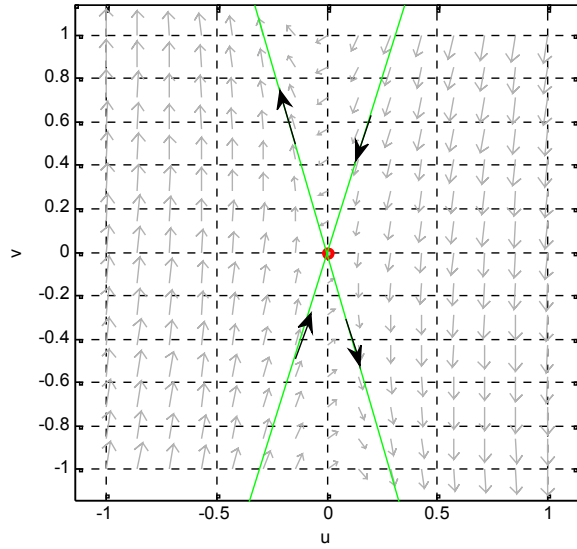


圖 3.4(b) 以鞍點 c 為平衡點所生成線性化系統之相位描繪圖

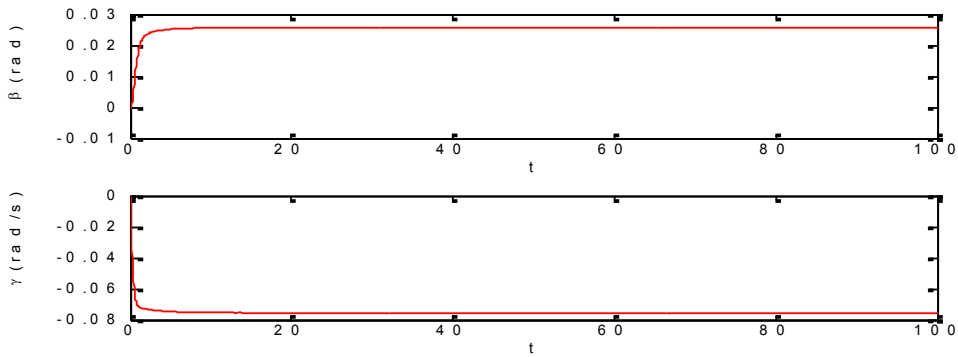


圖 3.5(a) $v = 25m/s, \delta_f = -0.0113$ 系統響應圖

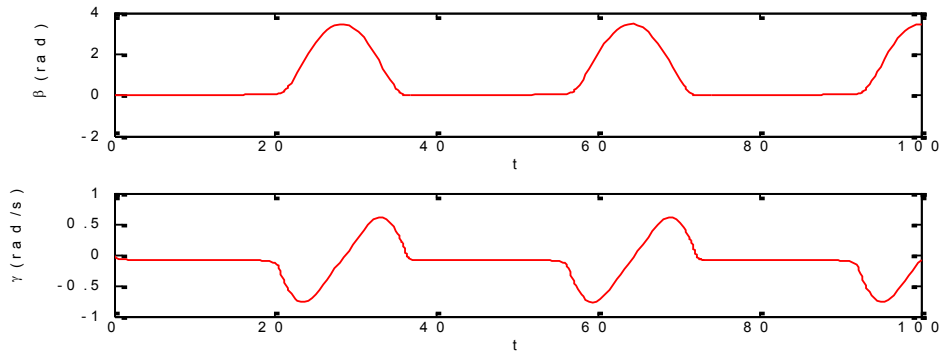
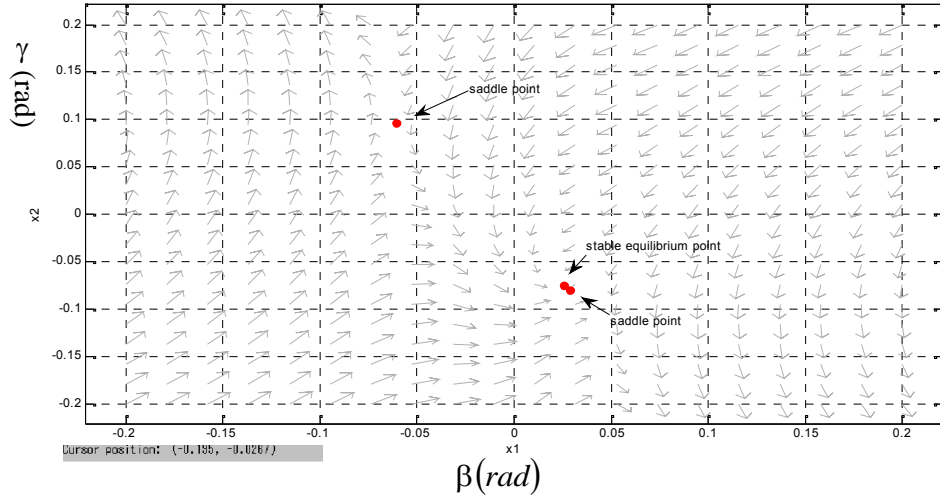
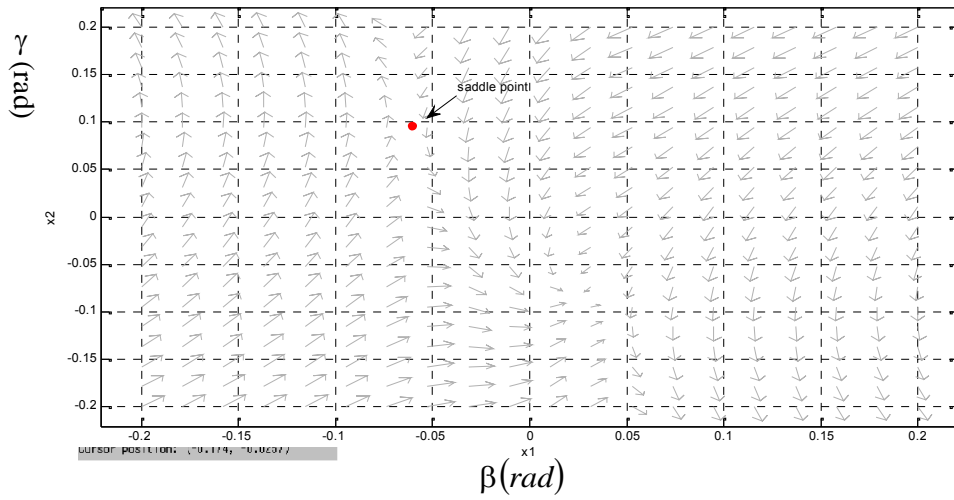


圖 3.5(b) $v = 25m/s, \delta_f = -0.0114$ 系統響應圖

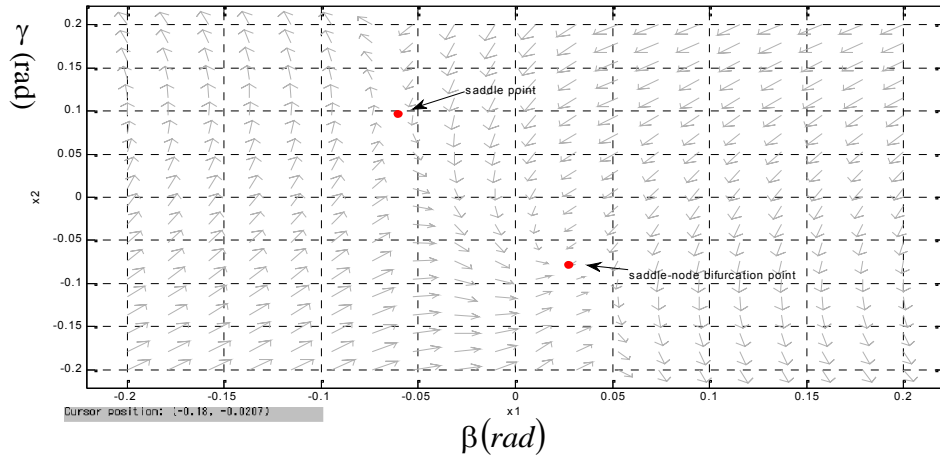


(a) $\delta_f = -0.0113(\text{rad})$



(b) $\delta_f = -0.0114(\text{rad})$

圖 3.6 系統狀態軌跡(低摩擦力路面)圖



$$\delta_f = -0.01135068635(\text{rad})$$

圖 3.7 系統分歧點圖

```

pplane7 Equilibrium point data

There is an equilibrium point at (0.027231, -0.078126)
Its specific type has not been determined.

The Jacobian is:
  -1.8424  -1.0083
  -2.6047  -1.4256

The eigenvalues and eigenvectors are:
-3.2679  (-0.57747, -0.81641)
-8.78e-007  (0.4801, -0.87721)

```

圖 3.8 系統分歧點特性

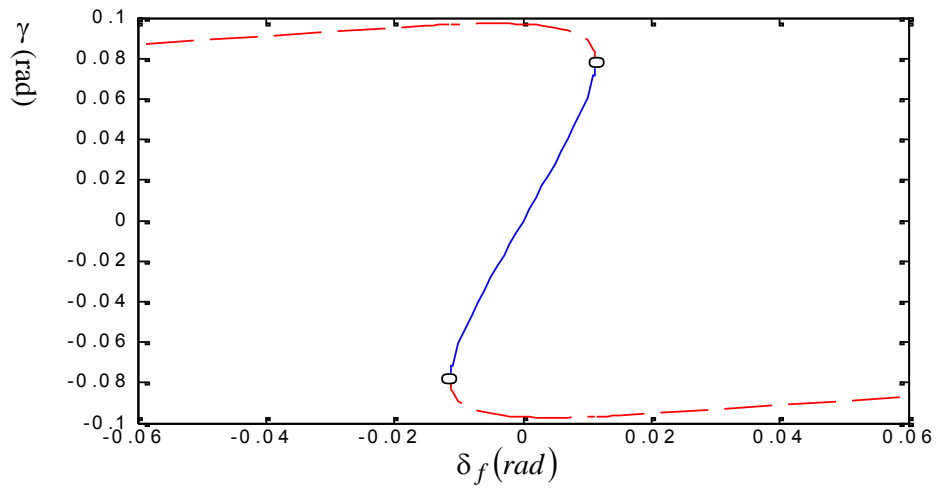
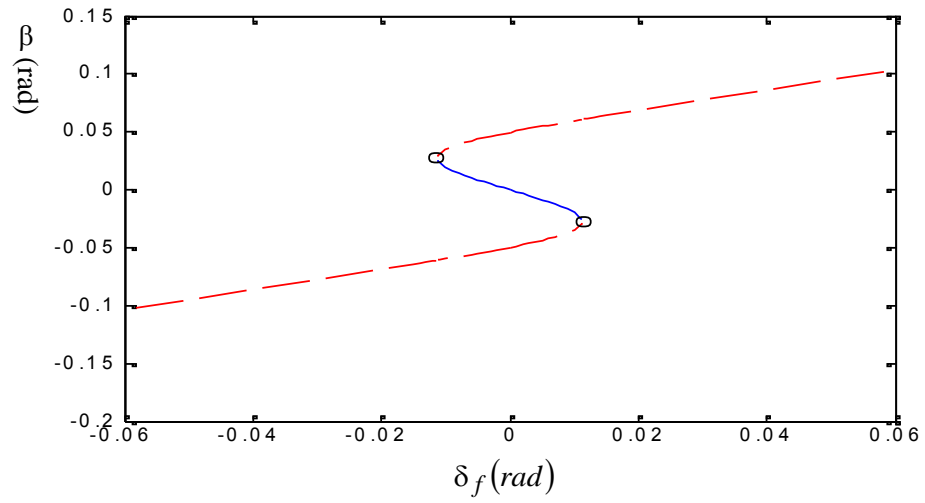


圖 3.9 $v = 25\text{m/s}$ 之分歧圖

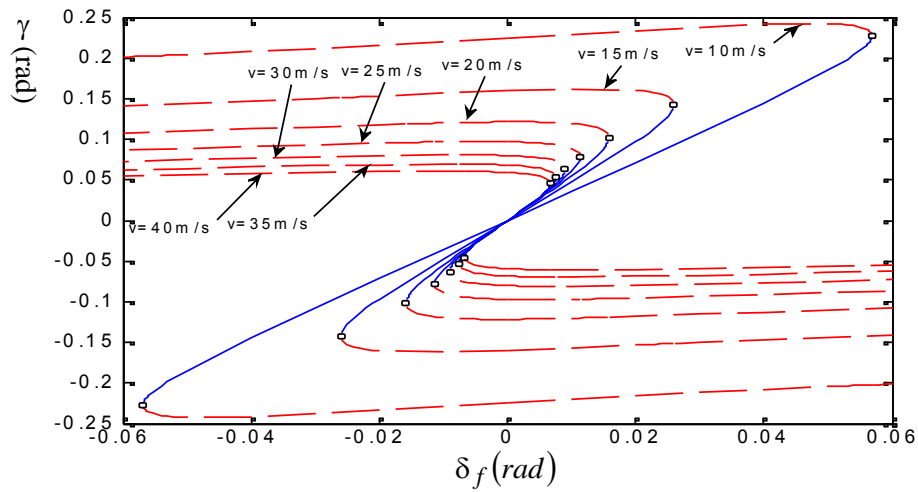
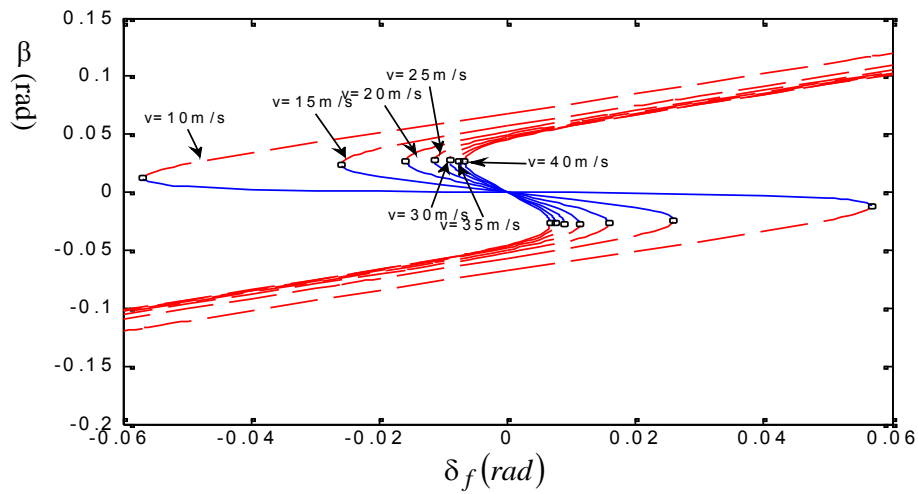


圖 3.10 各速度下之分歧圖

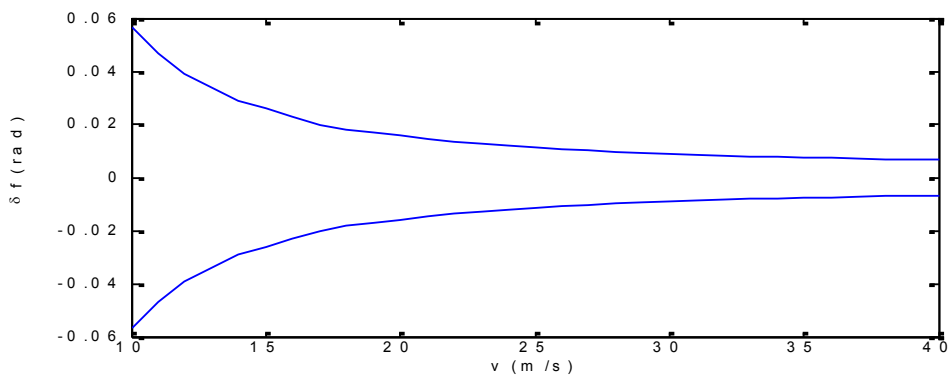


圖 3.11 $v=10\sim 40(m/s)$ 下轉向角度之穩定範圍

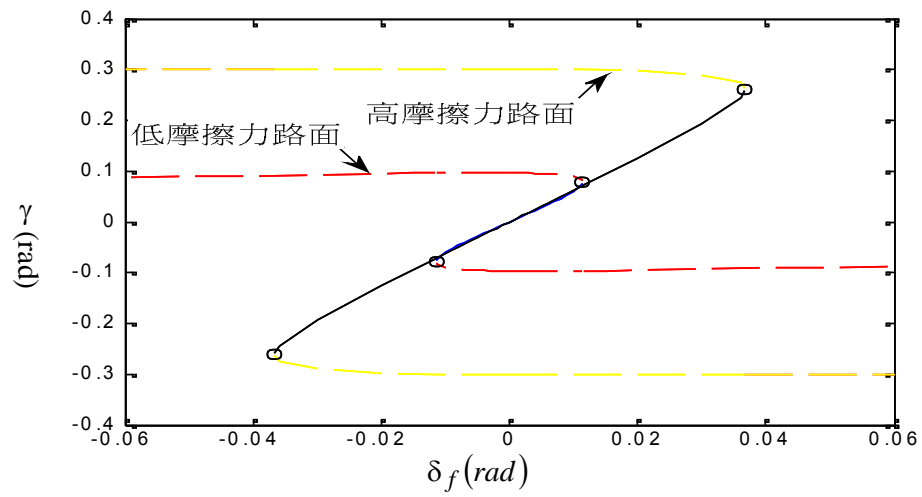
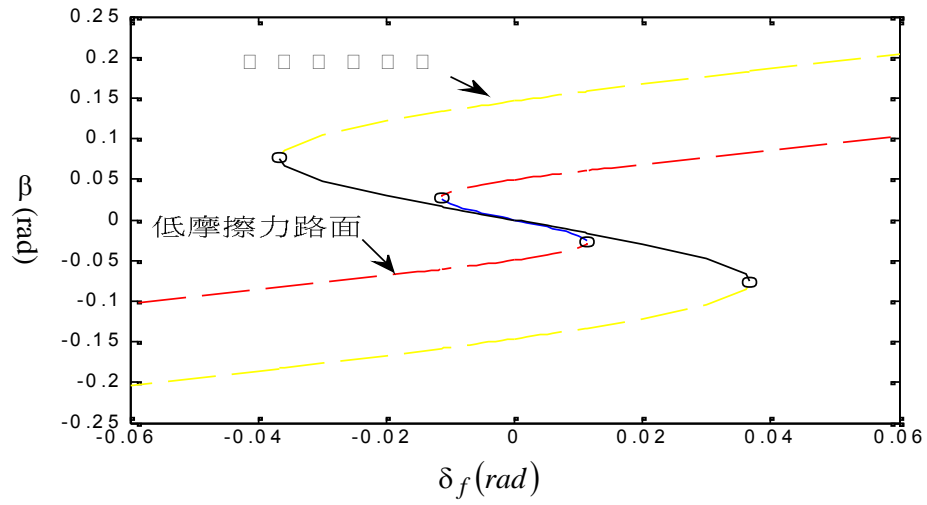


圖 3.12 $v = 25m/s$ 下高低摩擦力路面之分歧圖

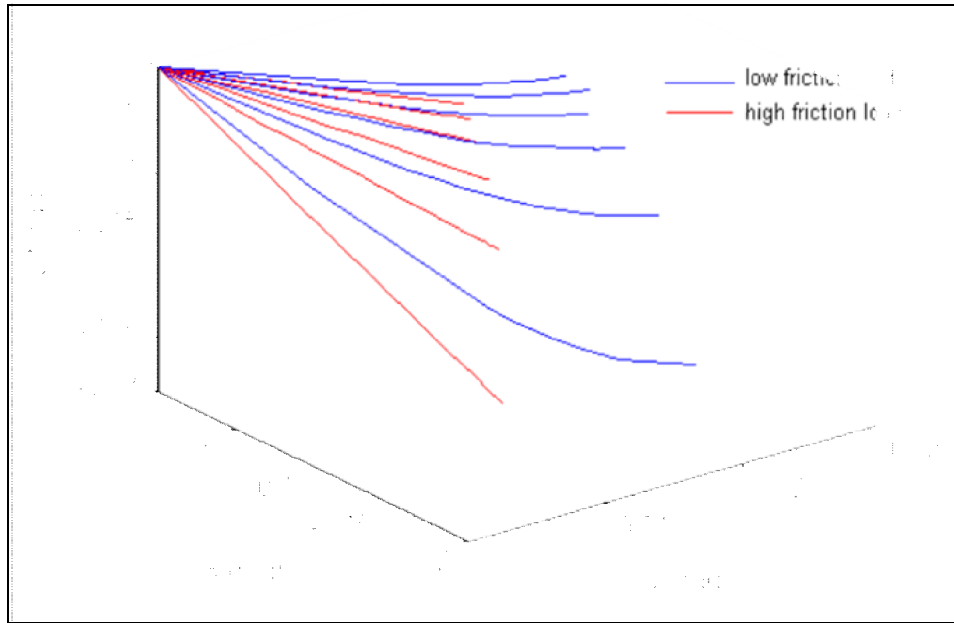


圖 3.13 相同輸入下，高低摩擦力路面 β 與 γ 之比較圖

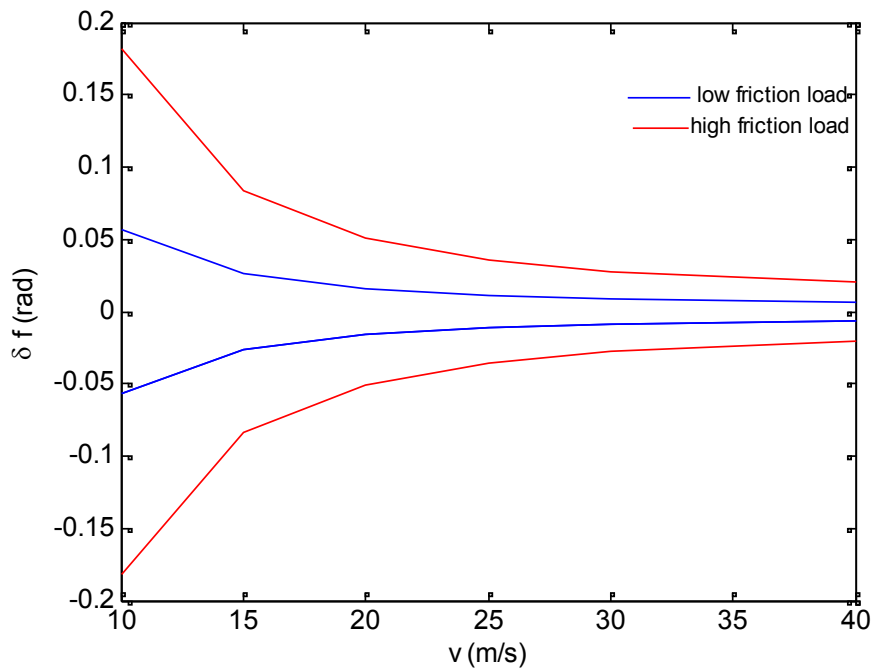


圖 3.14 高低摩擦力路面之最大安全轉向角度範圍比較圖

第四章

車輛轉向系統連續時間控制器設計

回顧本論文第三章，我們由相平面分析及數值模擬與穩定性分析得知，當車輛速度過快或輸入超過最大安全轉向角度範圍時，系統會發生鞍節點分歧現象，使得系統無一穩定的節點，因而將導致系統本身不穩定；若不施加適當控制補償，車輛很容易失控，甚而翻覆。在文獻[12]中，作者成功地提出以回授線性化控制來解決此一導致系統不穩定之現象。然而，回授線性化控制為一非線性時變控制法則（請參考第二章 2.1 節之推導），需要大量複雜的數值計算。因此，在計算複雜度考量下，實有必要發展一較簡易但有效之新型控制器。本論文延續[12]中之結果，進一步提出一“非時變回授線性化控制”設計方法，嘗試將回授線性化控制之時變控制值改以一固定之增益值，並利用此一簡化控制來控制車輛轉向系統之連續模型。另外，在傳統回授線性化控制中存在一固定增益之參數設計問題（詳見第二章 2.1 節之說明），本章中將提出如何最佳設計此一參數值。

在 4.1 節中，我們首先提出車輛轉向系統之一線性模型。在 4.2 節中，我們依據所推導之線性化模型並仿照第二章 2.1 節回授線性化控制設計方法，提出一非時變回授線性化控制。在 4.3 節中，我們針對車輛

轉向系統之線性模型提出一最佳線性平方控制器 (linear quadratic regulator) 控制法則。利用此一所推導出之最佳控制增益值，我們可解決 4.2 節中所推導出非時變回授線性化控制之參數設計問題。

4.1 線性化模型

將系統(3.4)-(3.5)式在平衡點 δ_f^0 、 β^0 、 γ^0 做一階 Taylor 級數展開，我們可得一線性化結果如下：

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \dot{\beta}^0 + \left. \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} (\beta - \beta^0) + \left. \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \gamma} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} (\gamma - \gamma^0) + \left. \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \delta_f} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} (\delta_f - \delta_f^0) + O_\beta(h) \\ \dot{\gamma} &= \dot{\gamma}^0 + \left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \beta} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} (\beta - \beta^0) + \left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} (\gamma - \gamma^0) + \left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \delta_f} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} (\delta_f - \delta_f^0) + O_\gamma(h)\end{aligned}\quad (4.1)$$

其中， $O_\beta(h)$ 及 $O_\gamma(h)$ 表示二階以上的高階項。令 $x = (\beta, \gamma)^T$ ， $x^0 = (\beta^0, \gamma^0)^T$ ， $\tilde{x} = x - x^0$ ， $O(h) = [O_\beta^T(h) \ O_\gamma^T(h)]^T$ ，並代入(3.12)式，可得系統動態誤差方程式如下：

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \beta} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} & \left. \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \gamma} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} \\ \left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \beta} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} & \left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \gamma} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \dot{\beta}}{\partial \delta_f} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} \\ \left. \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \delta_f} \right|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} \end{bmatrix} (\delta_f - \delta_f^0) + O(h).\quad (4.2)$$

令 $\tilde{u} = \delta_f - \delta_f^0$ 。利用(3.4)-(3.5)式，並忽略高階項 $O(h)$ ，我們可將(4.2)式表示為下面系統線性化方程式：

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}\quad (4.3)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{\beta}}{\partial \delta_f} \Big|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} \\ \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial \delta_f} \Big|_{(\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$a_{11} = \frac{1}{mv} \frac{\partial}{\partial \beta} (F_{yf} + F_{yr}) (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0) \quad (4.5a)$$

$$a_{12} = \frac{1}{mv} \frac{\partial}{\partial \gamma} (F_{yf} + F_{yr}) (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0) - 1 \quad (4.5b)$$

$$a_{21} = \frac{\cos \beta^0}{I_z} \left(L_f \frac{\partial F_{yf} (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)}{\partial \beta} - L_\gamma \frac{\partial F_{yr} (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)}{\partial \beta} \right) \quad (4.5c)$$

$$a_{22} = \frac{\cos \beta^0}{I_z} \left(L_f \frac{\partial F_{yf} (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)}{\partial \gamma} - L_\gamma \frac{\partial F_{yr} (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)}{\partial \gamma} \right) \quad (4.5d)$$

$$b_1 = \frac{1}{mv} \frac{\partial}{\partial \delta_f} (F_{yf} + F_{yr}) (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0) \quad (4.6a)$$

$$b_2 = \frac{\cos \beta^0}{I_z} \left(L_f \frac{\partial F_{yf} (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)}{\partial \delta_f} - L_\gamma \frac{\partial F_{yr} (\beta^0, \gamma^0, \delta_f^0)}{\partial \delta_f} \right) \quad (4.6b)$$

請參考附錄 A 有關上述微分值 $\frac{\partial F_{yf}}{\partial \beta}$ 、 $\frac{\partial F_{yf}}{\partial \gamma}$ 、 $\frac{\partial F_{yf}}{\partial \delta_f}$ 、 $\frac{\partial F_{yr}}{\partial \beta}$ 、 $\frac{\partial F_{yr}}{\partial \gamma}$ 、 $\frac{\partial F_{yr}}{\partial \delta_f}$ 之

計算。

4.2 非時變回授線性化控制器設計

在本節中，我們利用 3.1 節之回授線性化控制設計方法及 4.1 節之線性模型來設計一非時變回授線性化控制器。首先，我們設計一針對車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之回授線性化控制。在任一平衡點下，我們將車輛轉向系統模型(3.4)-(3.5)改寫為下面一仿射-型式非線性系統：

$$\dot{\tilde{x}}_1 = f_1(\tilde{x}) + g_1(\tilde{x})\tilde{u} \quad (4.7)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = f_2(\tilde{x}) + g_2(\tilde{x})\tilde{u} \quad (4.8)$$

其中 $\tilde{x}_1 = \beta - \beta^0$, $\tilde{x}_2 = \gamma - \gamma^0$

$$f_1(\tilde{x}) = \frac{1}{mv} \left\{ F_{yf}(\tilde{x} + x^0, \delta_f^0) + F_{yr}(\tilde{x} + x^0, \delta_f^0) \right\} - (\tilde{x}_2 + x_2^0) \quad (4.9a)$$

$$f_2(\tilde{x}) = \frac{\cos(\tilde{x}_1 + x_1^0)}{I_z} \left\{ L_f F_{yf}(\tilde{x} + x^0, \delta_f^0) - L_r F_{yr}(\tilde{x} + x^0, \delta_f^0) \right\} \quad (4.9b)$$

$$g_1(\tilde{x}) = \frac{1}{mv} g_u(\tilde{x}) \quad (4.9c)$$

$$g_2(\tilde{x}) = \frac{L_f \cos(\tilde{x}_1 + x_1^0)}{I_z} g_u(\tilde{x}) \quad (4.9d)$$

$$g_u(\tilde{x}) = \frac{\partial F_{yf}}{\partial \delta_f}(\tilde{x} + x^0, \delta_f^0) \neq 0. \quad (4.9e)$$

現假設存在一非線性映射 $z = T(\tilde{x}) = [T_1(\tilde{x}) \ T_2(\tilde{x})]^T$ 能將(4.7)-(4.8)轉換成

下式:

$$\dot{z} = (A_f + B_f K)z \quad (4.10)$$

其中

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

令回授增益 $K = [k_1 \ k_2]$, 則回授線性化控制可設計如下:

$$\tilde{u} = \phi(\tilde{x}) (\theta(\tilde{x}) + K \cdot T(\tilde{x})) \quad (4.12)$$

其中

$$\phi(\tilde{x}) = \frac{1}{\frac{\partial T_2(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_1} g_1(\tilde{x}) + \frac{\partial T_2(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_2} g_2(\tilde{x})} \quad (4.13)$$

$$\theta(\tilde{x}) = - \left(\frac{\partial T_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_1} f_1(\tilde{x}) + \frac{\partial T_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_2} f_2(\tilde{x}) \right). \quad (4.14)$$

利用 3.1 節之推導，我們可得 $T_1(\tilde{x})$ 、 $T_2(\tilde{x})$ 需滿足下面條件式：

$$\frac{\partial T_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_1} g_1(\tilde{x}) + \frac{\partial T_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_2} g_2(\tilde{x}) = 0 \quad (4.15)$$

$$T_2(\tilde{x}) = \frac{\partial T_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_1} f_1(\tilde{x}) + \frac{\partial T_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_2} f_2(\tilde{x}). \quad (4.16)$$

將(4.9c)-(4.9d)代入(4.15)式，我們可得下式：

$$g_u(\tilde{x}) \left[\frac{1}{mv} \frac{\partial T_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{L_f \cos(\tilde{x}_1 + x_{1,e})}{I_z} \frac{\partial T_1(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_2} \right] = 0. \quad (4.17)$$

根據(4.17)式，我們可選擇 $T_1(\tilde{x})$ 為

$$T_1(\tilde{x}) = \frac{1}{mv} \tilde{x}_2 - \frac{L_f}{I_z} [\sin(\tilde{x}_1 + x_1^0) - \sin(x_1^0)] \quad (4.18)$$

根據(4.16)-(4.17)式，我們可選擇 $T_2(\tilde{x})$ 為

$$T_2(\tilde{x}) = \frac{\cos(\tilde{x}_1 + x_1^0)}{I_z} \left[L_f (\tilde{x}_2 + x_2^0) - \frac{L_f + L_r}{mv} F_{yr}(\tilde{x} + x^0, \delta_f^0) \right]. \quad (4.19)$$

根據(4.18)-(4.19)式，我們可計算下式

$$\frac{\partial T_2(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_1} = -\frac{\sin(\tilde{x}_1)}{I_z} \left(L_f \tilde{x}_2 - \frac{L_f + L_r}{mv} \times F_{yr} \right) - \frac{L_f + L_r}{I_z m \times v} \cos(\tilde{x}_1) \left(\frac{\partial F_{yr}}{\partial \tilde{x}_1} \right) \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial T_2(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_2} = \frac{\cos(\tilde{x}_1)}{I_z} \left(L_f - \frac{L_f + L_r}{mv} \times \frac{\partial F_{yr}}{\partial \tilde{x}_2} \right) \quad (4.21)$$

利用(4.20)-(4.21)，我們可計算 $\phi(\tilde{x})$ (4.13)及 $\theta(\tilde{x})$ (4.14)。

其次，代入下面關係式

$$f_1(\tilde{x}) = [a_{11} \ a_{12}] \tilde{x}, \quad f_2(\tilde{x}) = [a_{21} \ a_{22}] \tilde{x}, \quad g_1(\tilde{x}) = b_1, \quad g_2(\tilde{x}) = b_2 \quad (4.22)$$

並仿照(4.12)-(4.19)之推導過程，我們可得非時變回授線性化控制如下：

$$\tilde{u} = \phi(\theta + K \cdot T) \tilde{x} \quad (4.23)$$

其中

$$\phi = \frac{1}{b_1 T_{21} + b_2 T_{22}} \quad (4.24)$$

$$\theta = -[a_{11} T_{21} + a_{21} T_{22} \quad a_{12} T_{21} + a_{22} T_{22}] \quad (4.25)$$

$$T = \begin{bmatrix} -b_2 & b_1 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \quad T_{21} = b_1 a_{21} - b_2 a_{11}, \quad T_{22} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}. \quad (4.26)$$

最後，我們可藉由羅斯穩定法則來判定線性化系統(4.10)之 K 值在何種條件下，可確保系統的穩定性。將系統(3.11)式改寫如下：

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} z$$

我們可得系統特徵方程式為 $\lambda^2 - k_2 \lambda - k_1 = 0$ 。由羅斯穩定法則可知，當 k_1 及 k_2 同時為負值時，系統(4.10)為穩定，反之則不穩定。值得一提的是上述 K 值為控制器設計參數，不同 K 值會產生不同的控制效果，請參考文獻[12]中有關如何選取較適合之 K 值的討論。

4.3 最佳線性平方控制器 (Linear quadratic regulator) 設計

針對線性系統(3.27)，我們可設計一最佳線性平方控制器如下所述。定義性能指標 (Performance Index) 如下：

$$J = \min \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\infty} (\tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{u}^T R \tilde{u}) dt \quad (4.27)$$

其中 $Q = Q^T > 0$ 及 $R = R^T > 0$ 。依據最佳控制理論，我們可得最佳線性控制如下：

$$\tilde{u} = -K^* \times \tilde{x} \quad (4.28)$$

其中

$$K^* = R^{-1} B^T S \quad (4.29)$$

S 為下面連續時間代數 Riccati 方程式(CARE)：

$$-SA - A^T S + SBR^{-1}B^T S - Q = 0 \quad (4.30)$$

之解。雖然最佳線性控制增益值與系統設計參數 Q 及 R 設定相關，但 Q 及 R 設定具有工程上直觀之物理意義，且模擬結果顯示：使用一般 Q 及 R 設定值（請參考第六章模擬結果），其所設計出之控制效能一般而言皆能獲致不錯之控制效果。

上述最佳線性控制增益值 K^* 亦可用來設計 4.2 節中所提出之非時變回授線性化控制增益值 K ，兩者之關係式如下：

$$K = -(\phi^{-1} K^* + \theta) \Gamma^{-1}. \quad (4.31)$$

第五章

車輛轉向系統離散時間控制器設計

拜電腦科技之賜，數位控制為現今最普遍之控制方法，而離散時間控制法則又是其中最主要設計之關鍵。依據文獻[14]之模擬結果，我們得知直接將回授線性化控制以歐拉前進時間差分近似法所得到的離散時間控制器在實用上具有很大大之限制。因此，在本章中我們嘗試設計一針對車輛轉向系統控制之較實際離散時間控制法則，以因應現今較實際之數位控制器設計需求。依據所推導離散模型之不同，本章將提出兩種不同之離散時間控制法則。5.1 節中依據回授線性化控制所採用仿射-型式非線性系統(4.7)-(4.8)，我們提出一時變離散時間控制法則，而在 5.2 節中依據線性模型(4.3)，我們提出一非時變離散時間控制法則。

5.1 時變離散時間控制器設計

首先，我們可將(4.9a)-(4.9b)式改寫如下：

$$f_1(\tilde{x}) = \frac{1}{mv} \{F_{yf}(x, \delta_f^0) + F_{yr}(x, \delta_f^0)\} - (x_2) \quad (5.1)$$

$$f_2(\tilde{x}) = \frac{\cos(x_1)}{I_z} \{L_f F_{yf}(x, \delta_f^0) - L_r F_{yr}(x, \delta_f^0)\} \quad (5.2)$$

將(5.1)-(5.2)式對平衡點 x^0 做一階 Taylor 級數展開，並捨棄高階項，可

將仿射-型式非線性系統(4.7)-(4.8)近似如下：

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + g(\tilde{x})\tilde{u} \quad (5.3)$$

其中 A 如(4.4)式所示， $g(\tilde{x}) = [g_1(\tilde{x}) \ g_2(\tilde{x})]^T$ 。

其次，將(5.3)式在取樣時間 T_s 取樣，我們可得下面離散時間模型

$$\tilde{x}_{k+1} = A_s \tilde{x}_k + B_k \tilde{u}_k \quad (5.4)$$

其中 $\tilde{x}_k = \tilde{x}(kT_s)$ 、 $\tilde{u}_k = \tilde{u}(kT_s)$ 及

$$A_s = e^{AT_s}, \quad B_k = \int_{s=0}^{T_s} e^{A(T_s-s)} ds \times g(\tilde{x}_k). \quad (5.5)$$

最後，定義性能指標如下：

$$J_N = \min \left\{ \frac{1}{2} (\tilde{x}_0^T Q_0 \tilde{x}_0 + \tilde{u}_0^T R \tilde{u}_0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} (\tilde{x}_k^T Q \tilde{x}_k + \tilde{u}_k^T R \tilde{u}_k) \right\} \quad (5.6)$$

其中 $Q_0 = Q_0^T > 0$ ， $Q = Q^T > 0$ 及 $R = R^T > 0$ ，並依據最佳控制理論，我們可得最佳線性離散時間控制[15]如下：

$$\tilde{u}_k = - (B_k^T P_{k+1} B_k + R)^{-1} B_k^T P_{k+1} A_s \tilde{x}_k \quad (5.7)$$

其中

$$P_{k+1} = A_s^T P_k A_s + Q - A_s^T P_k B_k (B_k^T P_k B_k + R)^{-1} B_k^T P_k A_s. \quad (5.8)$$

由於(5.7)式中之 B_k 及 P_{k+1} 矩陣在每一取樣點皆需重新計算，因此上述最佳線性離散時間控制(5.7)為一時變離散時間控制法則。

5.2 非時變離散時間控制器設計

由於 5.1 節中所推導之時變離散時間控制法則在每一取樣點皆需

重新計算控制器增益值，因此對計算複雜度有特別考量的系統中並不適用。在本節中，我們將提出一非時變離散時間控制法則之設計。

設計理念為將近似系統(5.3)以線性模型(4.3)取代。將(4.3)式在取樣時間 T_s 取樣，我們可得下面離散時間模型

$$\tilde{x}_{k+1} = A_s \tilde{x}_k + B_s \tilde{u}_k \quad (5.9)$$

其中

$$B_s = \int_{s=0}^{T_s} e^{A(T_s-s)} ds \times B. \quad (5.10)$$

定義性能指標如下：

$$J_\infty = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{x}_k^T Q \tilde{x}_k + \tilde{u}_k^T R \tilde{u}_k) \right\} \quad (5.11)$$

其中 $Q = Q^T > 0$ 及 $R = R^T > 0$ 。依據最佳控制理論，我們可得最佳線性離散時間控制如下：

$$\tilde{u}_k = -\left(B_s^T P B_s + R\right)^{-1} B_s^T P A_s \tilde{x}_k \quad (5.12)$$

其中 P 為下面離散時間代數 Riccati 方程式(DARE)：

$$P = A_s^T P A_s + Q - A_s^T P B_s \left(B_s^T P B_s + R\right)^{-1} B_s^T P A_s \quad (5.13)$$

之解。由於(5.12)式中之 B_s 及 P 矩陣只需事先計算一次，因此上述最佳線性離散時間控制(5.12)為一非時變離散時間控制法則。

第六章

模擬與驗證

在本章中，我們以數值模擬來驗證所提出之連續及離散時間控制法則能確保車輛轉向系統之穩定性。由於為能直接比較連續及離散時間控制法則之效能，在模擬中我們採用四階 Runge-Kutta MATLAB 程式 (RK4) (程式詳見附錄 C) 做為解微分方程之數值求解工具。模擬中使用之車輛轉向系統之參數選用的是低磨擦路面的參數，因為車子

在低磨擦的路面較容易打滑也符合在下坡路面汽車的煞車效果。

6.1 節提供數值模擬結果，顯示車輛轉向系統存在不穩定特性，並進一步驗證連續回授線性化控制器可確保車輛轉向系統之穩定性。在 6.2 節中，我們以數值模擬驗證了車輛轉向系統離散模型在適當的取樣時間下，可近似車輛轉向系統連續模型。5.3 節以數值模擬驗證了第四章中所改寫之離散回授線性化控制器能確保車輛轉向系統之穩定性，亦即證明了本論文所研究的車輛轉向系統之離散控制在確保車輛轉向系統的穩定性上是有效的。

6.1 輸入-狀態回授線性化控制器控制成效之數值模擬

模擬狀況 1: 驗證車輛轉向系統(3.4)-(3.5)在無控制情況下會出現系統

發散現象。設定系統初始狀態為 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ ，利用附錄 C 之 RK4 MATLAB 程式，我們可求得車輛轉向系統(3.4)-(3.5)在無加控制情況下之系統反應。模擬結果如圖 6.1 所示。

模擬狀況 2: 驗證輸入-狀態回授線性化控制器(4.12)能確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性。在此我們考慮文獻[12]中之分歧點 SNBP13 ($\beta^0 = 0.0267, \gamma^0 = -0.0454, \delta_f^0 = -0.0067$)，詳細低摩擦力路面之穩定平衡點與鞍點值，請參考附錄 B。

(1) 設定參數為低摩擦力路面、控制器增益 $(k_1, k_2) = (-0.5, -0.5)$ 、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ 、輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.2 所示。

(2) 設定參數為低摩擦力路面、控制器增益 $(k_1, k_2) = (-10, -0.5)$ 、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ ，輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.3 所示。

(3) 設定參數為低摩擦力路面、控制器增益 $(k_1, k_2) = (-0.5, -2.5)$ 、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ ，輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.4 所示。

(4) 設定參數為低摩擦力路面、控制器增益 $(k_1, k_2) = (-10, -2.5)$ 、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ ，輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.5 所示。

圖 6.1 顯示：車輛轉向系統在無施加控制的情況下，系統狀態在兩秒後呈現不穩定現象，並開使發散。此一模擬結果與文獻[12]中所列結果相同。圖 6.2 顯示：系統在加入回授線性化控制之後，原本系統在無控制情況下會發散的情況得到改善，系統狀態在十秒後開使收斂至平衡點。圖 6.3 顯示：相較圖 6.2 之模擬情況，當控制器增益 k_1 數值變大的時候，系統狀態振盪加劇，但反應的振幅較小，同時反應的時間較快。圖 6.4 顯示：相較圖 6.2 之模擬情況，當控制器增益 k_2 數值變大的時候，系統振盪現象消失，但系統反應的時間並未改善。圖 6.5 顯示：相較圖 6.2 之模擬情況，將控制器增益 k_1 及 k_2 的數值同時變大的時候，不只系統振盪現象改善，同時系統反應的時間也明顯變快。

綜合上述模擬結果，我們得知車輛轉向系統為一多平衡點系統（詳細資料請參考附錄 B），系統在無施加適當控制情況下，經常會發生不穩定現象，而輸入-狀態回授線性化控制為一有效之控制方法，並能確保車輛轉向系統之穩定性。模擬結果亦顯示回授線性化控制增益值與系統反應狀態息息相關，初步觀察結果如下：

(1) 增大控制器增益 k_1 的數值：振盪增大、 β 振幅減小、 γ 振幅增大。

(2) 增大控制器增益 k_2 的數值：振盪減小、振幅減小、收斂較快。

藉由不斷調變增益 k_1 及 k_2 的數值，我們可求得車輛轉向系統反應之最佳值。

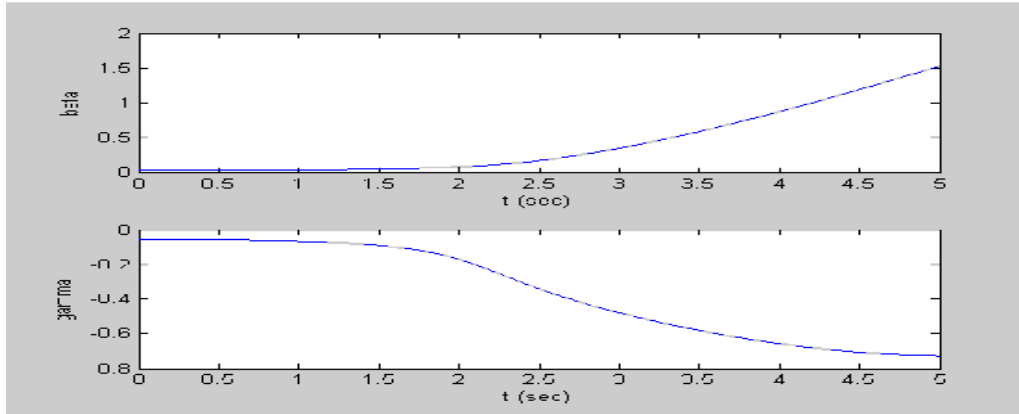


圖 6.1 無施加控制情況下系統發散現象

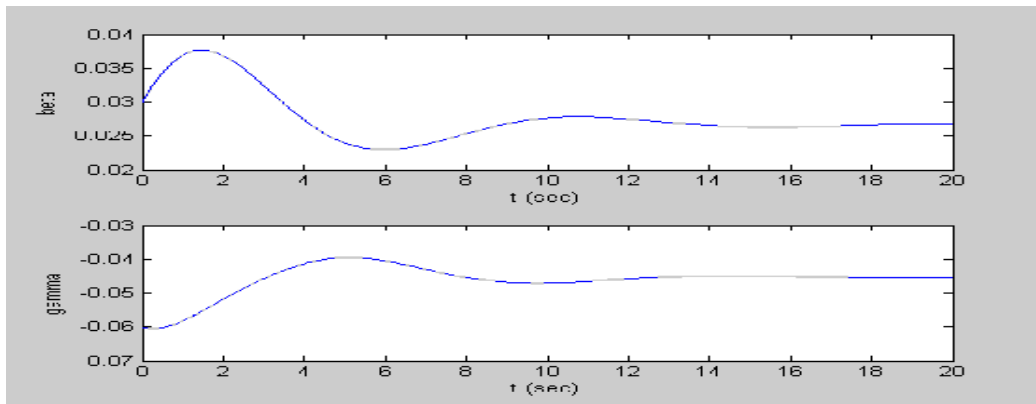


圖 6.2 加入回授線性化控制 $(k_1, k_2) = (-0.5, -0.5)$ 後系統收斂

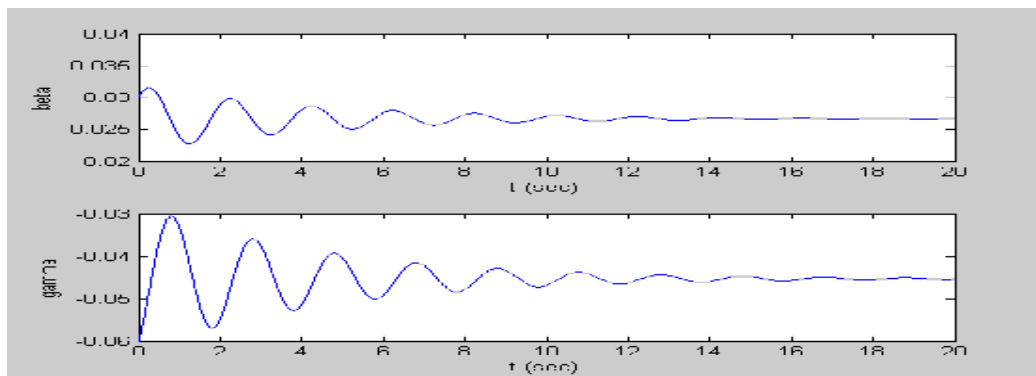


圖 6.3 加入回授線性化控制 $(k_1, k_2) = (-10, -0.5)$ 後系統收斂

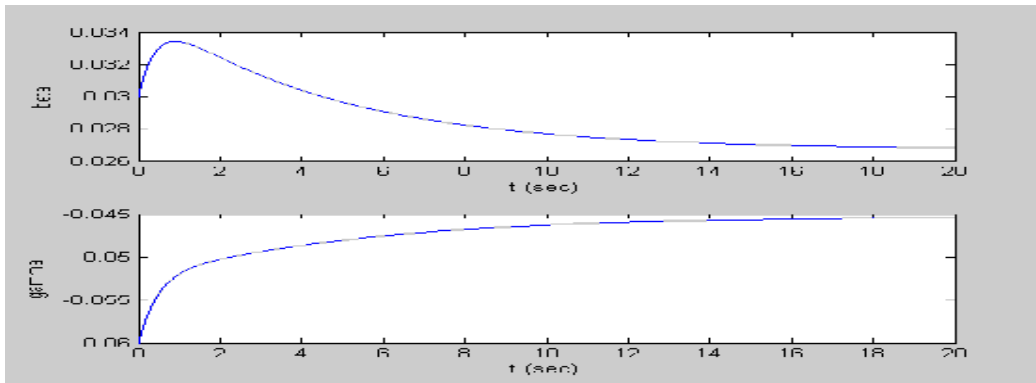


圖 6.4 加入回授線性化控制 $(k_1, k_2) = (-0.5, -2.5)$ 後系統收斂

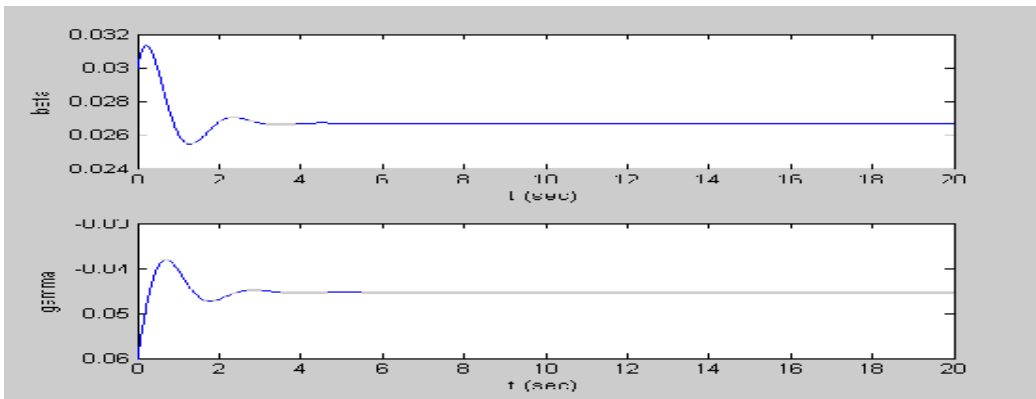


圖 6.5 加入回授線性化控制 $(k_1, k_2) = (-10, -2.5)$ 後系統收斂

6.2 非時變回授線性化控制器控制成效之數值模擬

由 6.1 節之模擬結果顯示，我們得知輸入-狀態回授線性化控制是一能確保車輛轉向系統穩定性之有效控制方法。另由 4.2 節之推導，我們得知本論文所提出之非時變回授線性化控制為一固定增益控制法則，其控制架構遠較輸入-狀態回授線性化控制簡單。因而若能證實非時變回授線性化控制亦能有效確保車輛轉向系統穩定性，則車輛轉向系統控制器之設計將會大幅減化，有助於後續數位控制器之推導。因

此，本章節的目的即在驗證 4.2 節中所推導之非時變回授線性化控制能確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性。為能同時比較非時變回授線性化控制與回授線性化控制之效能，在下面模擬中我們同時描繪出兩者之系統反應，其中藍色線為前者之輸出，而紅色線為後者之輸出。為能區別兩者，非時變回授線性化控制增益值以 K_1 及 K_2 表示。

模擬狀況 3: 驗證非時變回授線性化控制(4.23)能確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性。

(1) 設定參數為低摩擦力路面、控制器增益 $(K_1, K_2) = (-2.5, -1.0)$ 、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ 、輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.6 所示。

(2) 設定參數為低摩擦力路面、控制器增益 $(K_1, K_2) = (-10, -1.0)$ 、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ ，輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.7 所示。

(3) 設定參數為低摩擦力路面、控制器增益 $(K_1, K_2) = (-2.5, -5.0)$ 、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ ，輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.8 所示。

(4) 設定參數為低摩擦力路面、控制器增益 $(K_1, K_2) = (-10, -5.0)$ 、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ ，輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.9 所示。

由圖 6.6-6.9 所示，我們可推得每一個回授線性化控制之系統輸出皆有一對應之非時變回授線性化控制結果（模擬結果顯示：在此一對應關係下，後者之系統反應較前者為佳）。以本模擬為例，所考慮之四種非時變回授線性化控制增益值分別對應回授線性化控制增益值如下：

- (1) $(K_1, K_2) = (-2.5, -1.0)$ 相對應於 $(k_1, k_2) = (-0.5, -0.5)$ ，
- (2) $(K_1, K_2) = (-10., -1.0)$ 相對應於 $(k_1, k_2) = (-10., -0.5)$ ，
- (3) $(K_1, K_2) = (-2.5, -5.0)$ 相對應於 $(k_1, k_2) = (-0.5, -2.5)$ ，
- (4) $(K_1, K_2) = (-10., -5.0)$ 相對應於 $(k_1, k_2) = (-10., -2.5)$ 。

依據上面關係，我們可初步推得兩者之關係如下：

$$K_2 = 2 \times k_2 \quad (6.1)$$

而 K_1 及 k_1 間之關係則呈現某種非線性特性。為進一步了解此一關係，我們模擬了非常多情況（限制在 $|k_1| \leq 10$ 及 $|k_2| \leq 10$ ），發現下面非線性關係可簡單表示兩者之對應關係：

$$K_1 = \begin{cases} -2.5 & \text{if } 2|k_1| < 2.5 \\ 2 \times k_1 & \text{if } 2.5 \leq 2|k_1| \leq 10. \\ -10 & \text{if } 2|k_1| > 10 \end{cases} \quad (6.2)$$

因此，在關係(6.1)-(6.2)下，兩者設計結果可非常容易轉換。在此必須強調的是上述關係僅限於分歧點 SNBP13 之情況。由上述結果，我們得知非時變回授線性化控制能確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性。

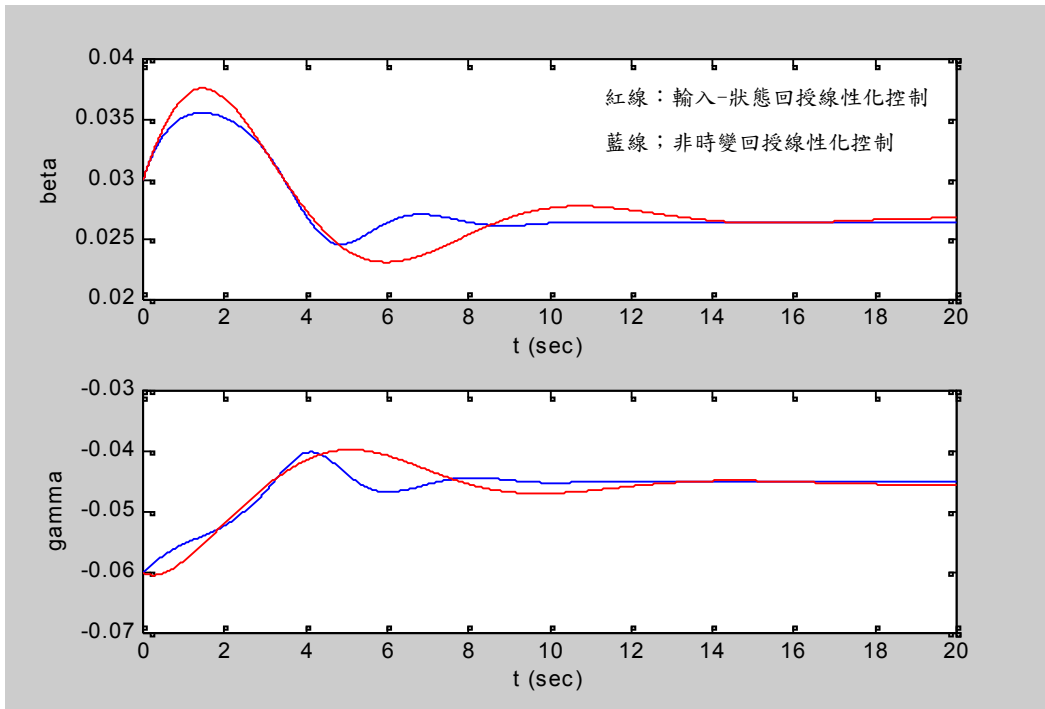


圖 6.6 $(K_1, K_2) = (-2.5, -1.0)$ 與 $(k_1, k_2) = (-0.5, -0.5)$ 之控制效果比較

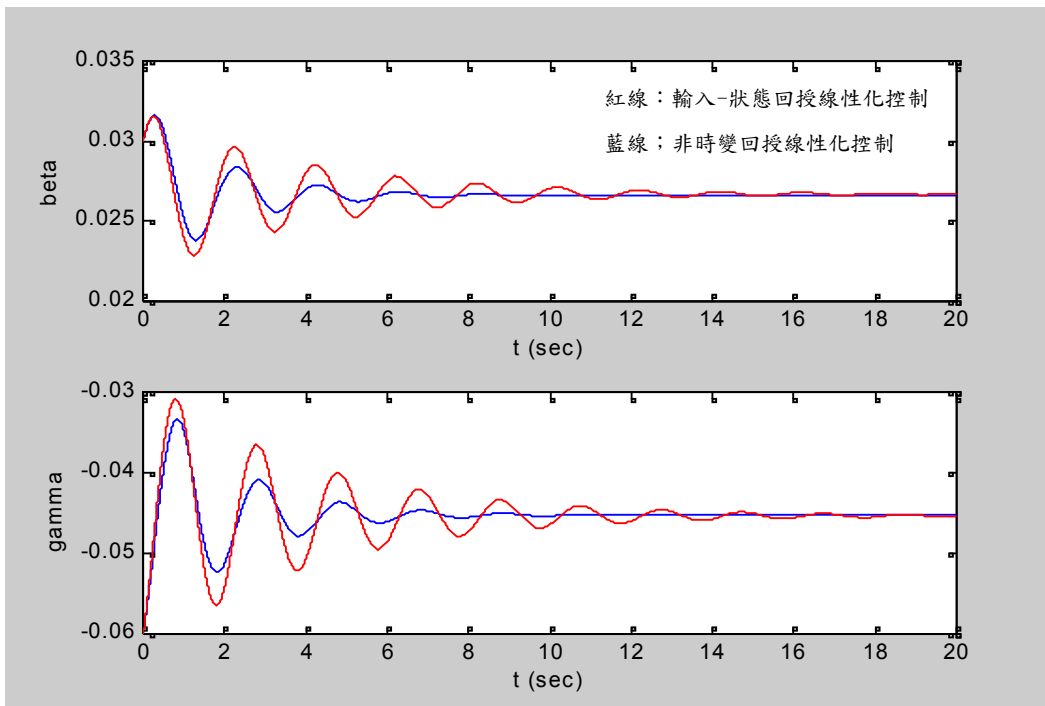


圖 6.7 $(K_1, K_2) = (-10, -1.0)$ 與 $(k_1, k_2) = (-10, -0.5)$ 之控制效果比較

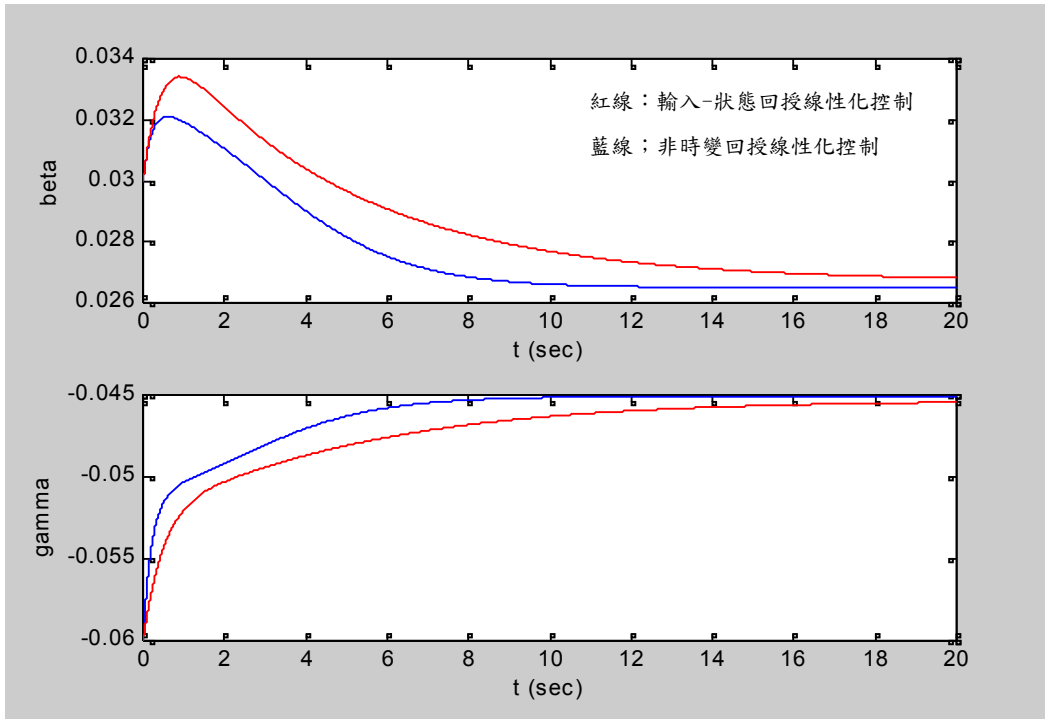


圖 6.8 $(K_1, K_2) = (-2.5, -5.0)$ 與 $(k_1, k_2) = (-0.5, -2.5)$ 之控制效果比較

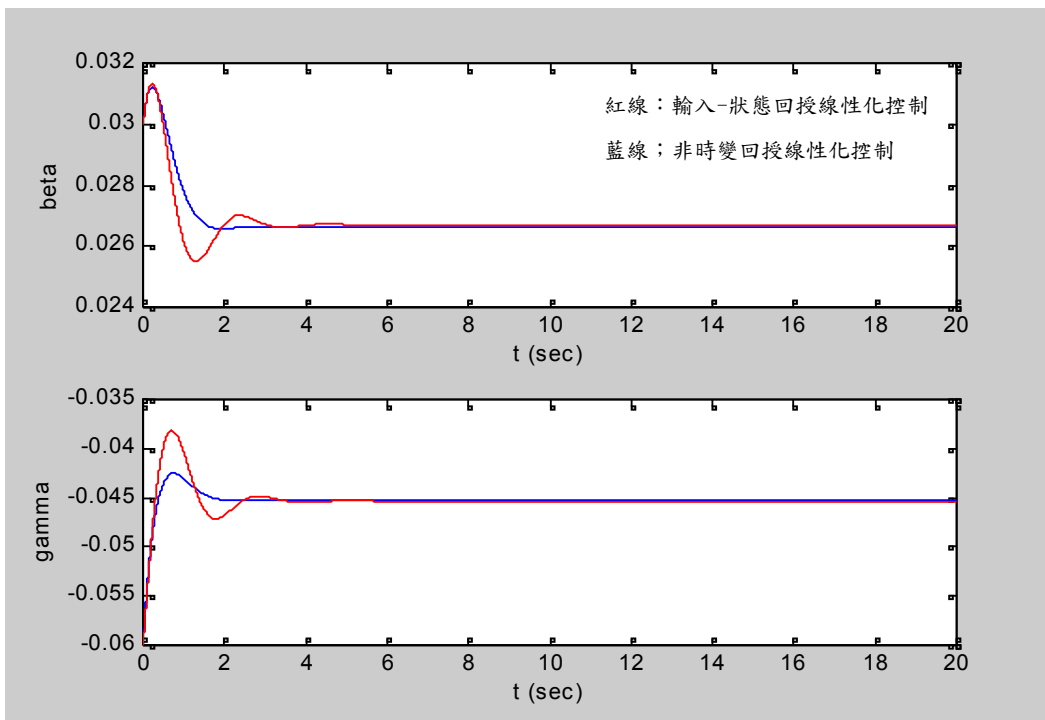


圖 6.9 $(K_1, K_2) = (-10., -5.0)$ 與 $(k_1, k_2) = (-10., -2.5)$ 之控制效果比較

6.3 最佳線性平方控制器控制成效之數值模擬

由 6.2 節得知非時變回授線性化控制具有確保車輛轉向系統穩定性之控制成效，另由 4.3 節得知最佳線性平方控制與回授線性化控制同屬固定增益控制法則，因此我們可推得最佳線性平方控制應能確保車輛轉向系統穩定性。在本章節，我們將驗證最佳線性平方控制之控制成效，另根據(4.31)及(6.1)-(6.2)式，我們亦可求得比文獻[12]中所設計結果更佳之一組輸入-狀態回授線性化控制設計結果。

模擬狀況 4: 驗證最佳線性平方控制 (4.28) 能確保車輛轉向系統 (3.4)-(3.5) 之穩定性。設定參數為低摩擦力路面、高速 ($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ 、 $Q = I_2$ 、 $R = 1$ 、輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 。模擬結果如圖 6.10 所示，其中藍色線為最佳線性平方控制(LQR)之輸出，而紅色線為輸入-狀態回授線性化控制之輸出。

圖 6.10 中 LQR 設計所得之最佳增益值為 $K^* = [-0.3774 \quad 0.9787]$ 。利用轉換關係(4.31)，我們可求得非時變回授線性化控制增益值為 $K = [-24.8528 \quad -17.7916]$ 。最後，再利用實驗所得關係式(6.1)-(6.2)，我們可求得一組較佳之輸入-狀態回授線性化控制設計結果，其增益值為 $k_1 = -12.4$ 及 $k_2 = -8.9$ ，設計結果如圖 6.10 所示。模擬顯示此一新設計之輸入-狀態回授線性化控制之輸出與 LQR 設計結果非常近似，同時效能比文獻[12]中所設計結果更佳。本實驗同時驗證所提出之最佳線性平方

控制與非時變回授線性化控制皆能確保車輛轉向系統之穩定性。另外，本實驗亦證明了關係式(6.1) -(6.2)能有效的推得一組較佳之輸入-狀態回授線性化控制設計結果。

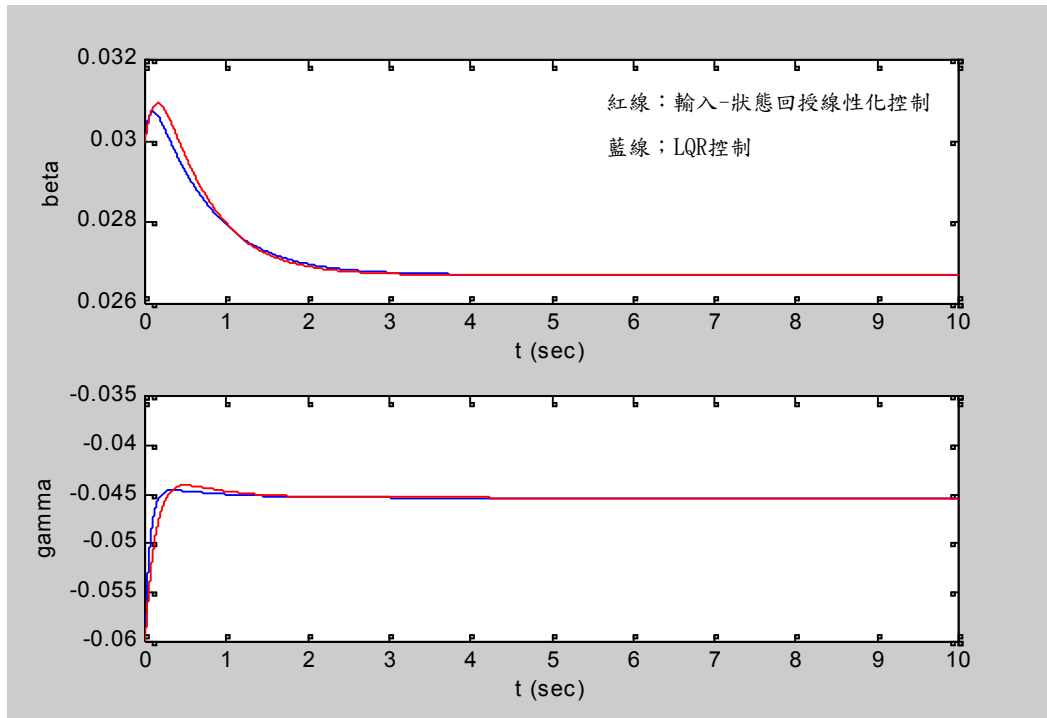


圖 6.10 $K^* = (-0.3774, 0.9787)$ 與 $(k_1, k_2) = (-12.4, -8.9)$ 之控制效果比較

6.4 離散回授線性化控制器控制成效之數值模擬

由第五章得知，為因應現今較實際之數位控制器設計需求，一針對車輛轉向系統控制之較實際離散時間控制法則設計有其必要及適切性。依據所使用離散模型之不同，本論文提出兩種不同之離散時間控制法則設計：一為時變型式(5.7)，另一為非時變型式(5.12)。在本章節，

我們將驗證此兩種離散時間控制法則之控制成效。為能驗證所提出離散時間控制是否能有效控制一實際之車輛轉向系統，在下面模擬中我們採用零階保持器(zoh)，將離散控制輸出轉換成一連續控制輸出。為能同時比較連續與離散時間控制器控制效能，我們同時描繪出兩者之系統反應，其中藍色線為 LQR 之輸出，而紅色線為所提出離散時間控制法則之輸出。

模擬狀況 5: 驗證時變離散回授線性化控制(5.7)能確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性。設定參數為低摩擦力路面、高速($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ 、 $Q = I_2$ 、 $R = 1$ 、輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 、取樣時間 $T_s = 0.5$ 及 $T_s = 0.05$ 。模擬結果如圖 6.11~6.12 所示。

模擬狀況 6: 驗證非時變離散回授線性化控制(5.12)能確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性。設定參數為低摩擦力路面、高速($v = 40(m/s)$)、初始狀態 $\beta = 0.03$ 、 $\gamma = -0.06$ 、 $Q = I_2$ 、 $R = 1$ 、輸入 $\delta_f = -0.0067(rad)$ 、取樣時間 $T_s = 0.5$ 及 $T_s = 0.05$ 。模擬結果如圖 6.13~6.14 所示。

圖6.11中紅色曲線為時變離散回授線性化控制在取樣時間 $T_s = 0.5$ 之輸出結果。雖然其效能與藍色曲線LQR之結果有很大差異，但其能有效的確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性。另由取樣理論可知，當取樣時間變小時，離散控制將會產生較佳之控制效果。因此，接下來我們將取樣時間縮小為 $T_s = 0.05$ ，模擬結果如圖6.12所示。從圖中我們

可清楚看出時變離散回授線性化控制與LQR產生幾乎一致之結果。從此一模擬狀況結果顯示：本論文提出之時變離散回授線性化控制為一有效離散控制架構，確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性。如同在5.1節中所言，時變離散回授線性化控制增益為一時變參數，在每一個取樣時間上皆必須依據當時系統輸出值重新計算。

為能降低計算複雜度，我們接著測試非時變離散回授線性化控制之效果，其結果如圖6.13~6.14所示。從圖中我們發現其系統輸出幾乎完全與圖6.11~6.12一致。我們更進一步測試兩者發現，在所考慮的模擬情況下，兩者幾乎沒有差別（詳見表6.1）。因此，我們可以推得本論文提出之非時變離散回授線性化控制不僅能確保車輛轉向系統(3.4)-(3.5)之穩定性，同時亦具有簡單（固定增益）之離散控制架構。

表 6.1 時變與非時變離散回授線性化控制效能比較

T_s	N	J_N	J_∞
1.00	10	0.0051	0.0040
0.50	20	0.0017	0.0013
0.10	100	0.0003	0.0003
0.05	200	0.0005	0.0005
0.01	1000	0.0021	0.0021

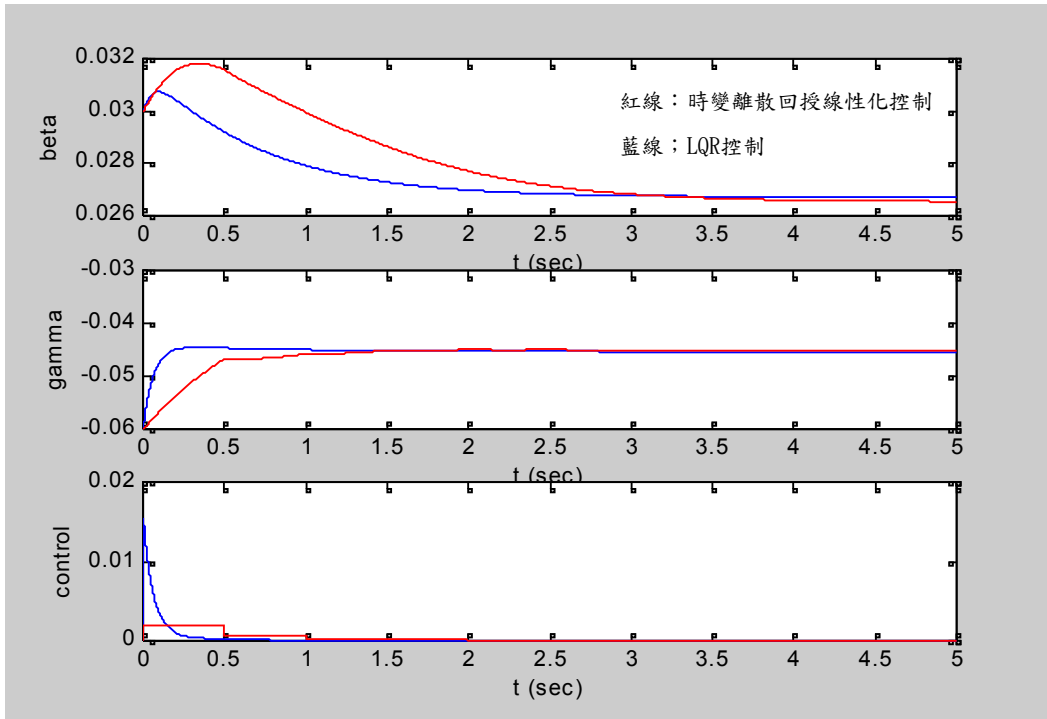


圖 6.11 LQR 與時變離散回授線性化控制之控制效果比較 ($T_s = 0.5$)

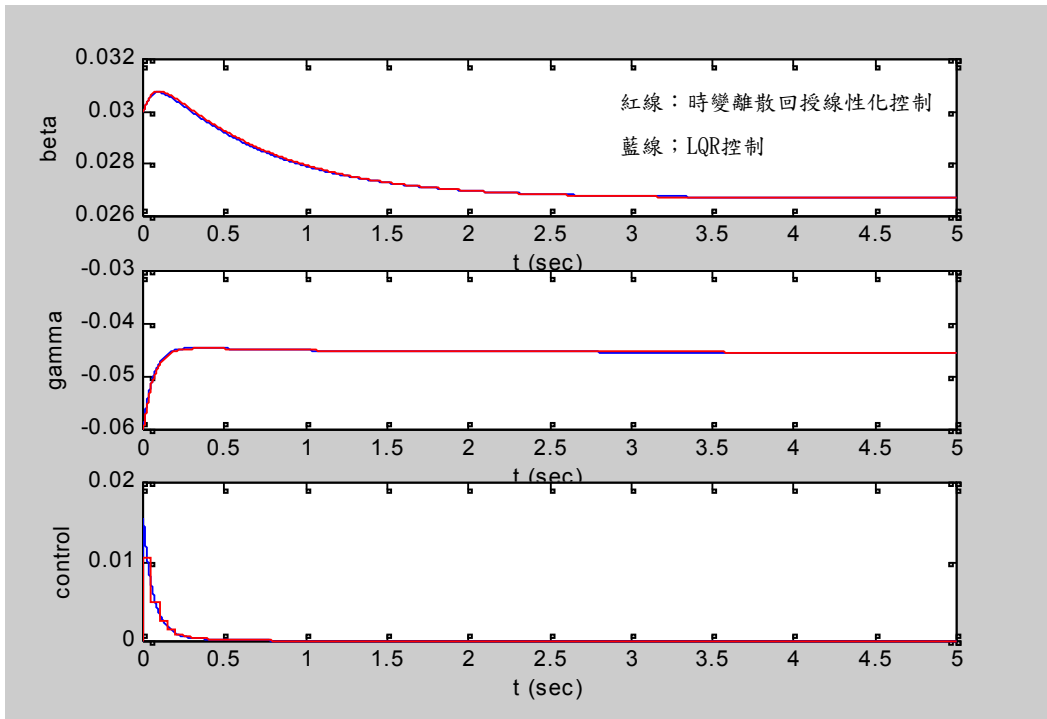


圖 6.12 LQR 與時變離散回授線性化控制之控制效果比較 ($T_s = 0.05$)

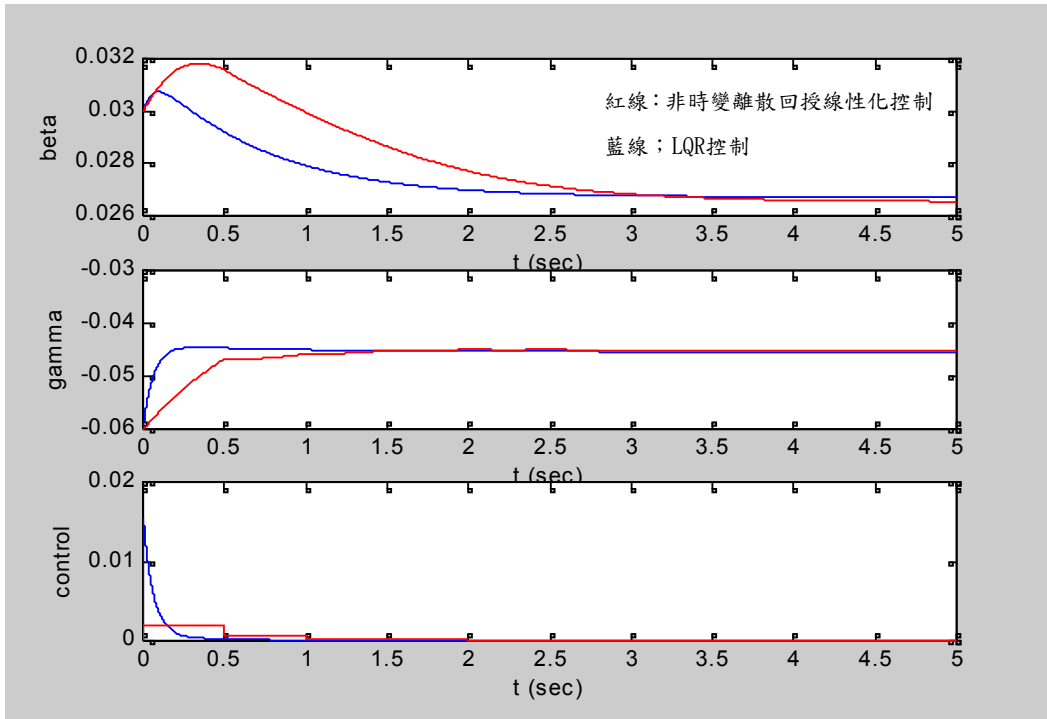


圖 6.13 LQR 與非時變離散回授線性化控制之控制效果比較 ($T_s = 0.5$)

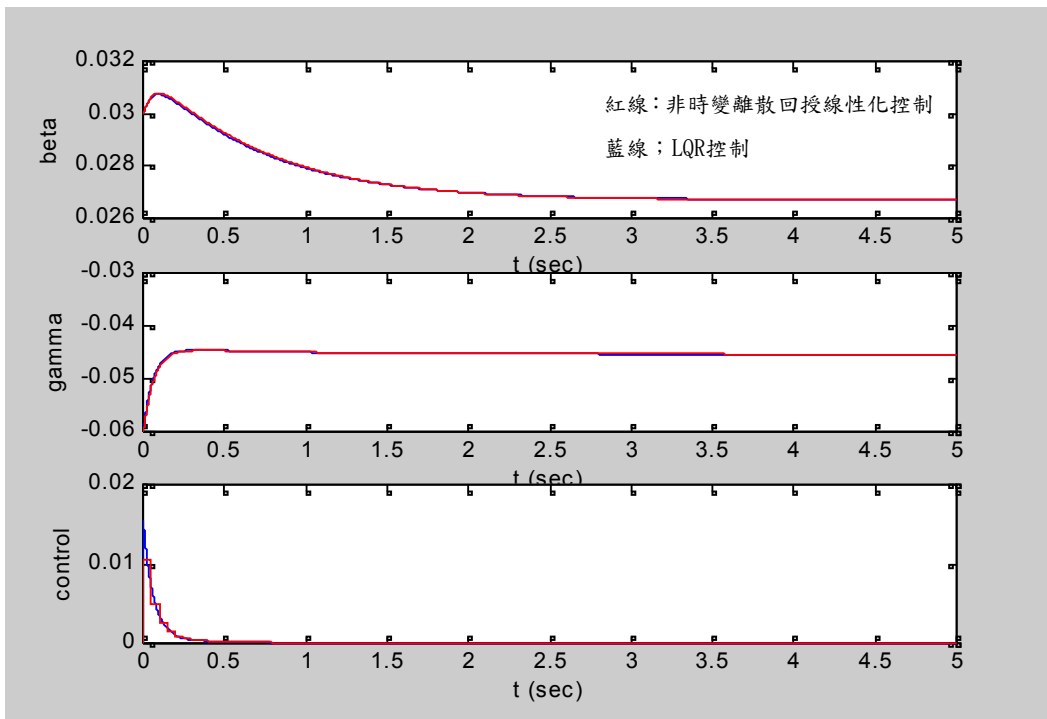


圖 6.14 LQR 與非時變離散回授線性化控制之控制效果比較 ($T_s = 0.05$)

第七章

結論與未來研究方向

本論文針對車輛轉向系統之不穩定現象，提出一有效的連續時間及離散時間控制器設計方法，以消除或延遲系統所存在之鞍節點分歧現象。藉由分析非線性控制方法中之輸入-狀態回授線性化控制技巧，本論文更進一步提出具運算優勢之一線性非時變控制模型，以降低回授線性化控制所需之複雜計算度。利用 LQR 最佳化控制理論，我們可以求得此一線性非時變控制之最佳固定增益值，同時利用文中所提出一實驗數據關係，我們亦可推得一組較現有文獻結果佳之輸入-狀態回授線性化控制設計結果。另外，我們亦嘗試設計一針對車輛轉向系統控制之離散時間控制方法，以因應現今較實際之數位控制器設計需求。依據所使用離散模型之不同，本論文提出兩種不同之離散時間控制法則設計：一為時變離散回授線性化控制，另一為非時變離散回授線性化控制。最後，我們利用一些數值模擬狀況，來驗證本論文所提出之連續時間及離散時間控制器設計方法之有效性。

另外，本論文延續論文[14]之研究成果，更針對論文中所建議之未來改進及研究方向參考，提出下列幾點改進：

1. 本論文所提出之離散控制架構受取樣時間影響的程度較小，同時在

合理的取樣時間下能充分近似連續時間模型所產生之結果

2. 本論文採用 RK4 做為數值模擬工具同時自行撰寫 MATLAB code (詳見附錄 D)，因此可利用 MATLAB 程式來解決同時存在連續與離散時間控制器之模擬情況，使得離散控制器能直接透過連續模型狀態取樣，並能控制較實際具連續時間特性之車輛轉向系統模型，而非近似之離散車輛轉向系統模型。
3. 本論文提出一實驗數據關係，並據此進行回授線性化控制器的最佳控制增益 K 值的選擇。

本論文利用數據模擬，推得出一有效之實驗數據關係(6.2)。據此一關係及利用最佳化理論，我們成功的推導出比現有文獻中提出結果更佳之一組回授線性化控制器設計結果。然而，此一結果僅限於所討論之分歧點 SNBP13。如何延伸此一成果，進一步推導出一更廣泛適用任一分歧點之通用結果，將是本論文未來尚可繼續研究之方向。

參考文獻

- [1] T.D. Gillespie, Fundamentals of vehicle dynamics. Society of Automotive Engineers, Inc., 1992.
- [2] J.Y. Wong, Theory of Ground Vehicles. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [3] E. Ono, S. Hosoe, H.D. Tuan, and S. Doi, “Bifurcation in vehicle dynamics and robust front wheel steering control,” IEEE Trans. Control Systems Technology, Vol.6, No. 3, pp. 412-420, 1998.
- [4] A.D. Rodic and M.K. Vukobratovic, “Contribution to the integrated control synthesis of road vehicles,” IEEE Trans. Control Systems technology, Vol. 7, No. 1, pp. 64-78, Jan. 1999.
- [5] H.E. Tseng, B. Ashrafi, D. Madau, T.A. Brown and D. Recker, “The development of vehicle stability control at Ford,” IEEE/ASME Trans. Mechatronics, Vol. 4, No. 3, pp. 223-234, Sept. 1999.
- [6] H. Lee and M. Tomizuka, “Adaptive vehicle traction force control for intelligent vehicle highway systems (IVHSs),” IEEE Trans. Industrial Electronics, Vol. 50, No. 1, pp. 37-47, Feb. 2003.
- [7] D.-C. Liaw, H.-H. Chiang, and T.-T. Lee, “Elucidating vehicle lateral dynamics using a bifurcation analysis,” IEEE Trans. Intelligent Transportation Systems, Vol. 8, No. 2, pp. 195-207, June 2007.
- [8] H.K. Khalil. Nonlinear Systems. Prentice-Hall Inc., 1996.
- [9] I.-J. Ha, A.K. Tugcu and N.M. Boustany, “Feedback linearizing control of vehicle longitudinal acceleration,” IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 34, No. 7, pp. 689-698, July 1989.
- [10] I.-J. Ha and S. Chong, “Design of a CLOS guidance law via feedback linearization,” IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol.

28, No. 1, pp. 51-63, Jan. 1992.

- [11] S.N. Singh and W. Yim, "Feedback linearization and solar pressure satellite attitude control," IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 32, No. 2, pp. 732-741, Apr. 1996.
- [12] D.-C. Liaw, W.-C Chung, C.-C Song and C.-S Hsieh, "A Feedback Linearization Design for the Control of Vehicle's Lateral dynamics," SICE-ICASE International Joint Conference 2006, Oct. 18-21, Busan, Korea, pp. 4937-4942, 2006.
- [13] 鐘文敬, "車輛系統之轉向分析與控制設計" 國立交通大學電機與控制工程學系博士論文, 九十六年七月。
- [14] 許智偉, "車輛橫向動力學分析及其離散控制器設計" 大華技術學院機電研究所碩士論文, 九十七年七月。
- [15] G. Chowdhary, "Online optimal control," DLR Internal Report, Nov. 2005.

附錄 A 線性化模型微分值計算補充

$$\alpha_f^0 = \beta^0 + \tan^{-1}\left(\frac{L_f \gamma^0}{v} \cos(\beta^0)\right) - \delta_f^0, \quad \alpha_r^0 = \beta^0 - \tan^{-1}\left(\frac{L_r \gamma^0}{v} \cos(\beta^0)\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{yf}}{\partial \beta}(x^0, \delta_f^0) &= D_f \cos\left[C_f \tan^{-1}\{B_f(1-E_f)\alpha_f^0 + E_f \tan^{-1}(B_f \alpha_f^0)\}\right] \\ &\quad \times \frac{C_f}{1 + (B_f(1-E_f)\alpha_f^0 + E_f \tan^{-1}(B_f \alpha_f^0))^2} \\ &\quad \times B_f \left[(1-E_f) + \frac{E_f}{1 + (B_f \alpha_f^0)^2} \right] \times \left(1 - \frac{\frac{L_f \gamma^0}{v} \sin(\beta^0)}{1 + \left(\frac{L_f \gamma^0}{v} \sin(\beta^0)\right)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{yf}}{\partial \gamma}(x^0, \delta_f^0) &= D_f \cos\left[C_f \tan^{-1}\{B_f(1-E_f)\alpha_f^0 + E_f \tan^{-1}(B_f \alpha_f^0)\}\right] \\ &\quad \times \frac{C_f}{1 + (B_f(1-E_f)\alpha_f^0 + E_f \tan^{-1}(B_f \alpha_f^0))^2} \\ &\quad \times B_f \left[(1-E_f) + \frac{E_f}{1 + (B_f \alpha_f^0)^2} \right] \times \frac{\frac{L_f}{v} \cos(\beta^0)}{1 + \left(\frac{L_f \gamma^0}{v} \cos(\beta^0)\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{yf}}{\partial \delta_f}(x^0, \delta_f^0) &= -D_f \cos\left[C_f \tan^{-1}\{B_f(1-E_f)\alpha_f^0 + E_f \tan^{-1}(B_f \alpha_f^0)\}\right] \\ &\quad \times \frac{C_f}{1 + (B_f(1-E_f)\alpha_f^0 + E_f \tan^{-1}(B_f \alpha_f^0))^2} \\ &\quad \times B_f \left[(1-E_f) + \frac{E_f}{1 + (B_f \alpha_f^0)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{yr}}{\partial \beta}(x^0, \delta_f^0) &= D_r \cos\left[C_r \tan^{-1}\left\{B_r(1-E_r)\alpha_r^0 + E_r \tan^{-1}(B_r\alpha_r^0)\right\}\right] \\ &\times \frac{C_r}{1 + \left(B_r(1-E_r)\alpha_r^0 + E_r \tan^{-1}(B_r\alpha_r^0)\right)^2} \\ &\times B_r \left[(1-E_r) + \frac{E_r}{1 + (B_r\alpha_r^0)^2} \right] \times \left(1 + \frac{\frac{L_r\gamma^0 \sin(\beta^0)}{v}}{1 + \left(\frac{L_r\gamma^0 \cos(\beta^0)}{v}\right)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{yr}}{\partial \gamma}(x^0, \delta_f^0) &= D_r \cos\left[C_r \tan^{-1}\left\{B_r(1-E_r)\alpha_r^0 + E_r \tan^{-1}(B_r\alpha_r^0)\right\}\right] \\ &\times \frac{C_r}{1 + \left(B_r(1-E_r)\alpha_r^0 + E_r \tan^{-1}(B_r\alpha_r^0)\right)^2} \\ &\times B_r \left[(1-E_r) + \frac{E_r}{1 + (B_r\alpha_r^0)^2} \right] \times \frac{-\frac{L_r}{v} \cos(\beta^0)}{1 + \left(\frac{L_r\gamma^0 \cos(\beta^0)}{v}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_{yr}}{\partial \delta_f}(x^0, \delta_f^0) = 0,$$

附錄 B 低摩擦力路面之穩定平衡點與鞍點之詳細數據

表

表 B.1 低摩擦力路面之穩定平衡點與鞍點

V=10

ue	Spiral or nodal sink			Saddle point1		Saddle point2	
	0	0.0000	0.0000	Spiral sink.	0.0677	-0.2242	-0.0677
-0.01	0.0004	-0.0356	Spiral sink.	0.0593	-0.2289	-0.0761	0.2196
-0.02	0.0009	-0.0714	Spiral sink.	0.0510	-0.2337	-0.0847	0.2153
-0.03	0.0015	-0.1075	Spiral sink.	0.0426	-0.2383	-0.0934	0.2114
-0.04	0.0026	-0.1446	Spiral sink.	0.0340	-0.2419	-0.1021	0.2077
-0.05	0.0049	-0.1846	Nodal sink.	0.0242	-0.2426	-0.1110	0.2044
-0.051	0.0053	-0.1890	Nodal sink.	0.0231	-0.2422	-0.1119	0.2041
-0.052	0.0057	-0.1936	Nodal sink.	0.0219	-0.2417	-0.1128	0.2037
-0.053	0.0063	-0.1984	Nodal sink.	0.0206	-0.2410	-0.1137	0.2034
-0.054	0.0069	-0.2036	Nodal sink.	0.0192	-0.2399	-0.1146	0.2031
-0.055	0.0078	-0.2092	Nodal sink.	0.0177	-0.2383	-0.1155	0.2028
-0.056	0.0090	-0.2160	Nodal sink.	0.0157	-0.2356	-0.1164	0.2025
-0.0561	0.0092	-0.2168	Nodal sink.	0.0155	-0.2352	-0.1165	0.2025
-0.0562	0.0094	-0.2176	Nodal sink.	0.0152	-0.2347	-0.1166	0.2024
-0.0563	0.0096	-0.2185	Nodal sink.	0.0149	-0.2342	-0.1167	0.2024
-0.0564	0.0098	-0.2195	Nodal sink.	0.0147	-0.2337	-0.1168	0.2024
-0.0565	0.0100	-0.2205	Nodal sink.	0.0143	-0.2331	-0.1169	0.2024
-0.0566	0.0103	-0.2217	Nodal sink.	0.0140	-0.2323	-0.1170	0.2023
-0.0567	0.0107	-0.2231	Nodal sink.	0.0135	-0.2313	-0.1170	0.2023
-0.0568	0.0112	-0.2249	Nodal sink.	0.0129	-0.2298	-0.1171	0.2023
-0.0569	0.012	-0.2275	Bifurcation-p				
-0.057						-0.1173	0.2022
-0.058						-0.1182	0.2019
-0.059						-0.1191	0.2016
-0.06						-0.1200	0.2013

V=15

ue	Spiral or nodal sink			Saddle point1		Saddle point2	
	0	0.0000	0.0000	Spiral sink.	0.0572	-0.1597	-0.0572

-0.01	0.0060	-0.0472	Spiral sink.	0.0481	-0.1618	-0.0658	0.1566
-0.02	0.0131	-0.0969	Spiral sink.	0.0375	-0.1604	-0.0744	0.1532
-0.021	0.0140	-0.1023	Spiral sink.	0.0362	-0.1597	-0.0752	0.1529
-0.022	0.0151	-0.1080	Spiral sink.	0.0347	-0.1588	-0.0761	0.1525
-0.023	0.0162	-0.1140	Nodal sink.	0.0332	-0.1575	-0.0769	0.1522
-0.024	0.0176	-0.1205	Nodal sink.	0.0314	-0.1557	-0.0778	0.1518
-0.025	0.0194	-0.1281	Nodal sink.	0.0292	-0.1528	-0.0786	0.1515
-0.0259	0.0225	-0.1384	Nodal sink.	0.0258	-0.1467	-0.0794	0.1512
-0.0260	0.0241	-0.1428	Bifurcation-p				
-0.0261						-0.0796	0.1511
-0.027						-0.0803	0.1508
-0.03						-0.0829	0.1498
-0.04						-0.0916	0.1465
-0.05						-0.1004	0.1435
-0.06						-0.1092	0.1407

V=20

ue	Spiral or nodal sink			Saddle point1		Saddle point2	
0	0.0000	0.0000	Spiral sink.	0.0525	-0.1215	-0.0525	0.1215
-0.001	0.0012	-0.0054	Spiral sink.	0.0515	-0.1215	-0.0535	0.1214
-0.002	0.0023	-0.0107	Spiral sink.	0.0505	-0.1215	-0.0544	0.1214
-0.003	0.0035	-0.0161	Spiral sink.	0.0495	-0.1215	-0.0554	0.1213
-0.004	0.0047	-0.0215	Spiral sink.	0.0484	-0.1214	-0.0563	0.1211
-0.005	0.0059	-0.0269	Spiral sink.	0.0473	-0.1212	-0.0572	0.1210
-0.006	0.0071	-0.0324	Spiral sink.	0.0462	-0.1210	-0.0581	0.1209
-0.007	0.0083	-0.0378	Spiral sink.	0.0451	-0.1208	-0.0591	0.1207
-0.008	0.0096	-0.0434	Spiral sink.	0.0439	-0.1204	-0.0600	0.1205
-0.009	0.0109	-0.0490	Spiral sink.	0.0427	-0.1200	-0.0609	0.1203
-0.01	0.0122	-0.0547	Spiral sink.	0.0414	-0.1194	-0.0618	0.1201
-0.011	0.0137	-0.0606	Spiral sink.	0.0399	-0.1186	-0.0626	0.1199
-0.012	0.0152	-0.0666	Spiral sink.	0.0384	-0.1176	-0.0635	0.1197
-0.013	0.0169	-0.0730	Spiral sink.	0.0367	-0.1162	-0.0644	0.1195
-0.014	0.0189	-0.0800	Spiral sink.	0.0347	-0.1143	-0.0653	0.1193
-0.015	0.0215	-0.0882	Nodal sink.	0.0321	-0.1110	-0.0662	0.1190
-0.0151	0.0218	-0.0892	Nodal sink.	0.0317	-0.1106	-0.0663	0.1190
-0.0152	0.0221	-0.0902	Nodal sink.	0.0314	-0.1101	-0.0663	0.1190
-0.0153	0.0225	-0.0913	Nodal sink.	0.0310	-0.1095	-0.0664	0.1190

-0.0154	0.0229	-0.0924	Nodal sink.	0.0306	-0.1088	-0.0665	0.1190
-0.0155	0.0234	-0.0937	Nodal sink.	0.0301	-0.1081	-0.0666	0.1189
-0.0156	0.0239	-0.0951	Nodal sink.	0.0296	-0.1072	-0.0667	0.1189
-0.0157	0.0246	-0.0968	Nodal sink.	0.0289	-0.1060	-0.0668	0.1189
-0.0158	0.0267	-0.1017	Bifurcation-p				
-0.0159						-0.0670	0.1188
-0.02						-0.0705	0.1178
-0.03						-0.0792	0.1152
-0.04						-0.0878	0.1126
-0.05						-0.0966	0.1101
-0.06						-0.1054	0.1077

V=25

ue	Spiral or nodal sink			Saddle point1		Saddle point2	
0	0.0000	0.0000	Spiral sink.	0.0497	-0.0969	-0.0497	0.0969
-0.001	0.0017	-0.0057	Spiral sink.	0.0486	-0.0967	-0.0508	0.0970
-0.002	0.0034	-0.0113	Spiral sink.	0.0474	-0.0965	-0.0518	0.0971
-0.003	0.0052	-0.0170	Spiral sink.	0.0462	-0.0962	-0.0529	0.0972
-0.004	0.0069	-0.0228	Spiral sink.	0.0450	-0.0958	-0.0539	0.0972
-0.005	0.0087	-0.0285	Spiral sink.	0.0436	-0.0953	-0.0549	0.0972
-0.006	0.0105	-0.0344	Spiral sink.	0.0422	-0.0947	-0.0558	0.0972
-0.007	0.0124	-0.0404	Spiral sink.	0.0407	-0.0938	-0.0568	0.0971
-0.008	0.0145	-0.0467	Spiral sink.	0.0390	-0.0927	-0.0578	0.0970
-0.009	0.0167	-0.0533	Spiral sink.	0.0371	-0.0912	-0.0587	0.0970
-0.01	0.0194	-0.0607	Spiral sink.	0.0347	-0.0889	-0.0596	0.0969
-0.011	0.0240	-0.0716	Nodal sink.	0.0310	-0.0843	-0.0606	0.0967
-0.0111	0.0240	-0.0716	Nodal sink.	0.0305	-0.0835	-0.0607	0.0967
-0.0112	0.0247	-0.0731	Nodal sink.	0.0297	-0.0824	-0.0608	0.0967
-0.0113	0.0258	-0.0753	Nodal sink.	0.0287	-0.0807	-0.0608	0.0967
-0.0114	0.0272	-0.0781	Bifurcation-p				
-0.0115				-0.0610	0.0967		
-0.012				-0.0615	0.0966		
-0.013				-0.0624	0.0965		
-0.014				-0.0633	0.0963		
-0.015				-0.0642	0.0962		
-0.02				-0.0686	0.0953		
-0.03				-0.0774	0.0933		

-0.04				-0.0860	0.0911		
-0.05				-0.0948	0.0890		
-0.06				-0.1036	0.0871		

V=30

ue	Spiral or nodal sink			Saddle point1		Saddle point2	
0	0.0000	0.0000	Spiral sink.	0.0478	-0.0802	-0.0478	0.0802
-0.001	0.0022	-0.0057	Spiral sink.	0.0466	-0.0799	-0.0490	0.0804
-0.002	0.0044	-0.0114	Spiral sink.	0.0453	-0.0795	-0.0502	0.0806
-0.003	0.0066	-0.0172	Spiral sink.	0.0439	-0.0789	-0.0513	0.0808
-0.004	0.0088	-0.0230	Spiral sink.	0.0424	-0.0783	-0.0524	0.0809
-0.005	0.0112	-0.0290	Spiral sink.	0.0408	-0.0774	-0.0534	0.0809
-0.006	0.0137	-0.0352	Spiral sink.	0.0390	-0.0763	-0.0544	0.0810
-0.007	0.0164	-0.0418	Spiral sink.	0.0368	-0.0747	-0.0555	0.0810
-0.008	0.0198	-0.0493	Spiral sink.	0.0340	-0.0720	-0.0564	0.0810
-0.0081	0.0202	-0.0501	Spiral sink.	0.0337	-0.0717	-0.0565	0.0810
-0.0082	0.0206	-0.0510	Spiral sink.	0.0333	-0.0713	-0.0566	0.0810
-0.0083	0.0211	-0.0519	Spiral sink.	0.0329	-0.0709	-0.0567	0.0810
-0.0084	0.0215	-0.0529	Spiral sink.	0.0325	-0.0704	-0.0568	0.0810
-0.0085	0.0220	-0.0539	Spiral sink.	0.0320	-0.0698	-0.0569	0.0810
-0.0086	0.0226	-0.0550	Spiral sink.	0.0315	-0.0692	-0.0570	0.0810
-0.0087	0.0232	-0.0562	Nodal sink	0.0309	-0.0685	-0.0571	0.0810
-0.0088	0.0240	-0.0576	Nodal sink	0.0303	-0.0676	-0.0572	0.0810
-0.0089	0.0249	-0.0593	Nodal sink	0.0294	-0.0664	-0.0573	0.0810
-0.0090	0.0272	-0.0631	Bifurcation-p				
-0.0091						-0.0575	0.0810
-0.01						-0.0584	0.0809
-0.02						-0.0676	0.0799
-0.03						-0.0764	0.0782
-0.04						-0.0851	0.0764
-0.05						-0.0938	0.0747
-0.06						-0.1026	0.0730

V=35

ue	Spiral or nodal sink			Saddle point1		Saddle point2	
0	0.0000	0.0000	Spiral sink.	0.0465	-0.0682	-0.0465	0.0682
-0.001	0.0026	-0.0056	Spiral sink.	0.0452	-0.0678	-0.0478	0.0685

-0.002	0.0052	-0.0112	Spiral sink.	0.0437	-0.0673	-0.0490	0.0688
-0.003	0.0078	-0.0169	Spiral sink.	0.0422	-0.0666	-0.0502	0.0690
-0.004	0.0105	-0.0227	Spiral sink.	0.0404	-0.0657	-0.0513	0.0691
-0.005	0.0134	-0.0288	Spiral sink.	0.0384	-0.0645	-0.0524	0.0693
-0.006	0.0167	-0.0353	Spiral sink.	0.0360	-0.0628	-0.0535	0.0693
-0.007	0.0208	-0.0431	Spiral sink.	0.0326	-0.0597	-0.0546	0.0694
-0.0071	0.0214	-0.0440	Spiral sink.	0.0322	-0.0592	-0.0547	0.0694
-0.0072	0.0220	-0.0450	Spiral sink.	0.0317	-0.0586	-0.0548	0.0694
-0.0073	0.0226	-0.0461	Spiral sink.	0.0311	-0.0580	-0.0549	0.0694
-0.0074	0.0234	-0.0474	Spiral sink.	0.0304	-0.0572	-0.0550	0.0694
-0.0075	0.0243	-0.0489	Nodal sink.	0.0295	-0.0561	-0.0551	0.0694
-0.00759	0.0256	-0.0509	Nodal sink.	0.0282	-0.0546	-0.0552	0.0694
-0.0076	0.0270	-0.0528	Bifurcation-p				
-0.0077						-0.0553	0.0694
-0.01						-0.0576	0.0694
-0.02						-0.0669	0.0687
-0.03						-0.0758	0.0673
-0.04						-0.0845	0.0658
-0.05						-0.0932	0.0642
-0.06						-0.1020	0.0628

V=40

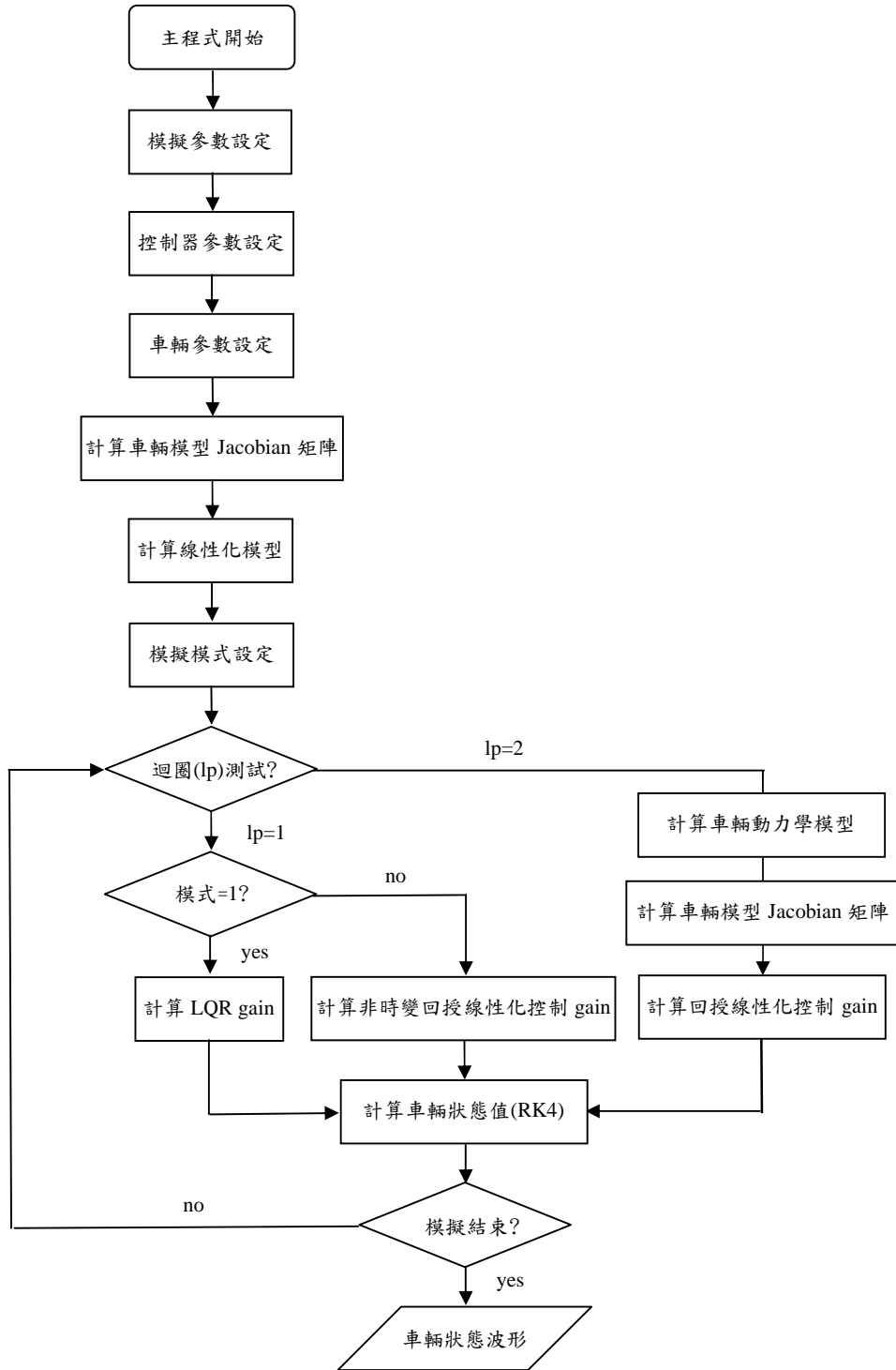
ue	Spiral or nodal sink			Saddle point1		Saddle point2	
0	0.0000	0.0000	Spiral sink.	0.0456	-0.0593	-0.0456	0.0593
-0.001	0.0029	-0.0054	Spiral sink.	0.0441	-0.0588	-0.0469	0.0596
-0.002	0.0058	-0.0108	Spiral sink.	0.0426	-0.0582	-0.0482	0.0599
-0.003	0.0088	-0.0164	Spiral sink.	0.0408	-0.0574	-0.0494	0.0602
-0.004	0.0119	-0.0221	Spiral sink.	0.0388	-0.0564	-0.0506	0.0603
-0.005	0.0154	-0.0282	Spiral sink.	0.0364	-0.0548	-0.0518	0.0605
-0.006	0.0196	-0.0352	Spiral sink.	0.0332	-0.0522	-0.0529	0.0606
-0.0061	0.0202	-0.0361	Spiral sink.	0.0327	-0.0518	-0.0530	0.0606
-0.0062	0.0207	-0.0369	Spiral sink.	0.0323	-0.0514	-0.0531	0.0606
-0.0063	0.0213	-0.0379	Spiral sink.	0.0317	-0.0509	-0.0532	0.0606
-0.0064	0.0220	-0.0389	Spiral sink.	0.0312	-0.0503	-0.0533	0.0606
-0.0065	0.0228	-0.0400	Spiral sink.	0.0305	-0.0496	-0.0534	0.0606
-0.0066	0.0237	-0.0414	Spiral sink.	0.0296	-0.0487	-0.0535	0.0606
-0.00669	0.0249	-0.0430	Spiral sink.	0.0285	-0.0475	-0.0536	0.0606

-0.0067	0.0267	-0.0454	Bifurcation-p				
-0.0068						-0.0537	0.0606
-0.01						-0.0570	0.0608
-0.02						-0.0665	0.0602
-0.03						-0.0754	0.0590
-0.04						-0.0841	0.0577
-0.05						-0.0928	0.0564
-0.06						-0.1017	0.0551

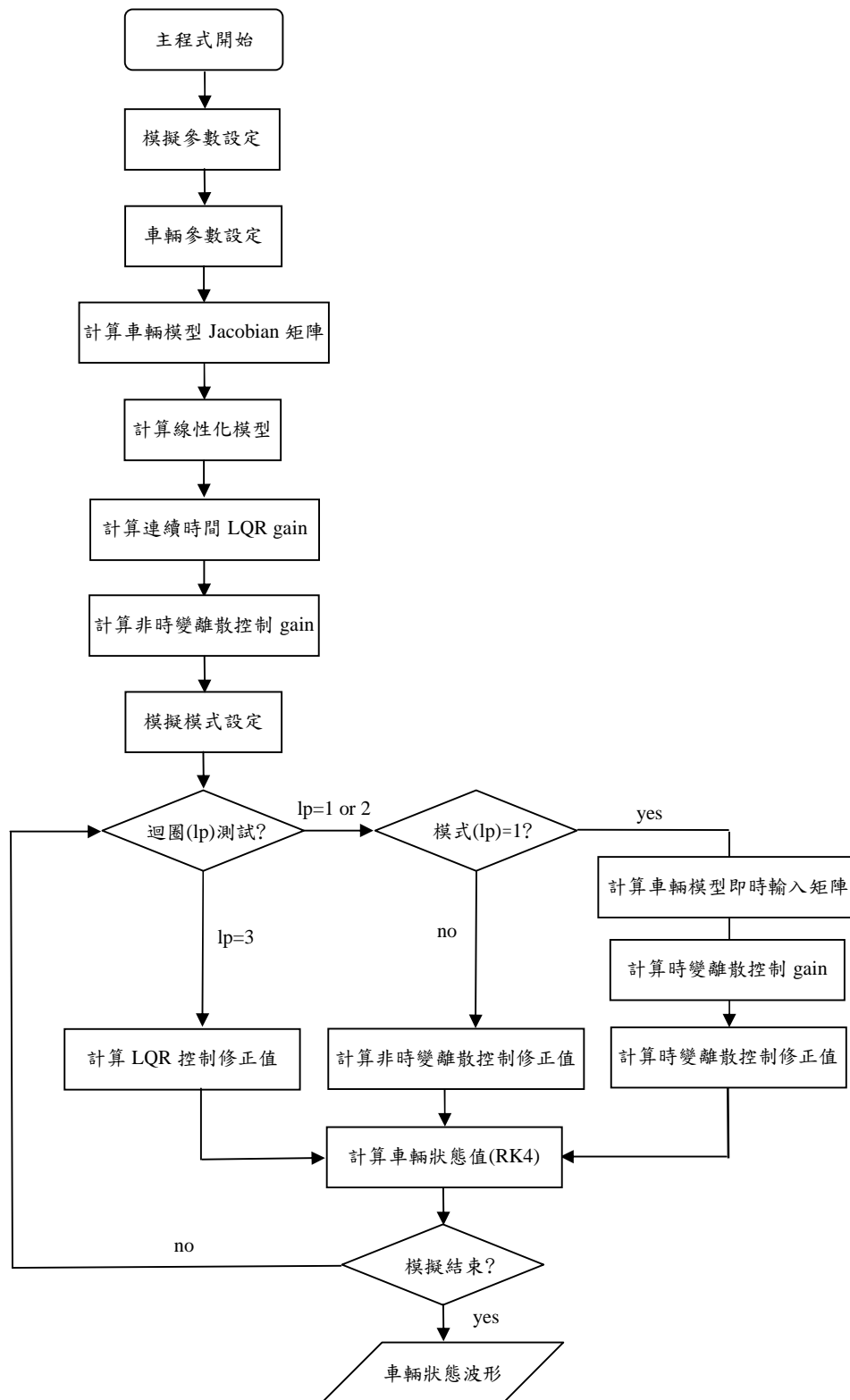
附錄 C 模擬驗證用 MATLAB 程式

C.1 程式設計流程圖

(1) 連續時間控制器控制效能評估



(2) 離散時間控制器控制效能評估



C.2 MATLAB 程式設計

(1) 連續時間控制器控制效能評估主程式

```
% Continuous-time Controller Performance Evaluation Program
% mode=1: Compare the performances of LQR design and feedback linearization
           control
% mode=2: Compare the performances of time -invariant feedback linearization control
           and feedback linearization control
global Bf Cf Df Ef Br Cr Dr Er M v Lf Lr Iz;
clc;
no=10000;t=zeros(no+1,1);X=zeros(2,no+1,3);
h=0.001;% basic simulation time interval
K1=-10.0;K2=-5.0; % time-invariant feedback linearization control gain matrix
k1=-10.0;k2=-2.5; % feedback linearization control gain matrix
Q=[1 0;0 1];R=1; % LQR design parameters
% Vehicle simulation data
Bf=11.275;Cf=1.56;Df=-2574.7;Ef=-1.999;
Br=18.631;Cr=1.56;Dr=-1749.7;Er=-1.7908;
M=1500;v=40;Lf=1.2;Lr=1.3;Iz=3000;
beta0=0.0267;gamma0=-0.0454;deltaf0=-0.0067; % equilibrium point
% calculate linearization model parameters: A11,A12,A21,A22,B1,B2
[Fyf1,Fyf2,Fyf3,Fyr1,Fyr2,Fyr3]=Jacobian(beta0,gamma0,deltaf0);
A11=1/M/v*(Fyf1+Fyr1);
A12=1/M/v*(Fyf2+Fyr2)-1;
A21=cos(beta0)/Iz*(Lf*Fyf1-Lr*Fyr1);
A22=cos(beta0)/Iz*(Lf*Fyf2-Lr*Fyr2);
B1=1/M/v*(Fyf3+Fyr3);
B2=cos(beta0)/Iz*(Lf*Fyf3-Lr*Fyr3);
mode=1; % mode=1: LQR design
           % mode=2: time-invariant feedback linearization control
for lp=1:2
    % lp=1: run LQR or time-invariant feedback linearization control
    % lp=2: run feedback linearization control
    beta=0.03;gamma=-0.06; % initial value
    X(lp,1,1)=beta;X(lp,1,2)=gamma;X(lp,1,3)=0;
    for j=1:no
        t(j+1,1)=j*h;
        if (lp == 1) % calculate time-invariant control gain
```

```

if (j == 1) % the gain only need to be calculated once
    if (mode == 1) % LQR control Design
        A=[A11 A12;A21 A22];
        B=[B1;B2];
        [K,S,E]=LQR(A,B,Q,R);
    else % time-invariant feedback linearization control
        T21=B1*A21-B2*A11;
        T22=B1*A22-B2*A12;
        T=[-B2 B1;T21 T22];
        PHI=1/(B1*T21+B2*T22);
        THETA=-[A11*T21+A21*T22 A12*T21+A22*T22];
        K=-PHI*(THETA+[K1 K2]*T);
    end;
end;
u=-K*[beta-beta0;gamma-gamma0];
else % calculate feedback linearization control gain
    [f1,f2,Fyf,Fyr]=VehicleDynamics(beta,gamma,deltaf0);
    [Fyf1,Fyf2,Fyf3,Fyr1,Fyr2,Fyr3]=Jacobian(beta,gamma,deltaf0);
    % g1,g2
    gu=Fyf3;
    g1=(1/M/v)*gu;
    g2=(Lf*cos(beta)*gu)/Iz;
    % T1,T2
    T1=1/M/v*(gamma-gamma0)-Lf/Iz*(sin(beta)-sin(beta0));
    T2=cos(beta)/Iz*(Lf*gamma-(Lf+Lr)/M/v*Fyr);
    % dT2/dx
    T21=-(sin(beta)/Iz)*(Lf*gamma-((Lf+Lr)/(M*v))*Fyr)-(cos(beta)*(Lf+Lr)/
        (Iz*M*v))*Fyr1;
    T22=cos(beta)/Iz*(Lf-(Lf+Lr)/M/v*Fyr2);
    % uk
    THETA=-(T21*f1+T22*f2);
    PHI=1/(T21*g1+T22*g2);
    u=PHI*(THETA+[k1 k2]*[T1;T2]);
end;
X(lp,j+1,3)=u;
deltaf=u+deltaf0; % vehicle input
[beta,gamma]=RK4(beta,gamma,deltaf,h); % calculate vehicle's current state
X(lp,j+1,1)=beta;X(lp,j+1,2)=gamma;

```



```

    end
end
subplot(2,1,1);
plot(t,X(1,:,1),'-b',t,X(2,:,1),'-r'),xlabel('t (sec)'),ylabel('beta')
subplot(2,1,2);
plot(t,X(1,:,2),'-b',t,X(2,:,2),'-r'),xlabel('t (sec)'),ylabel('gamma')

```

(2) 離散時間控制器控制效能評估主程式

```

% Discrete-time Controller Performance Evaluation Program
% mode=1: Compare the performances of time -variant discrete-time control and LQR
          design
% mode=2: Compare the performances of time -invariant discrete-time control and LQR
          design
global Bf Cf Df Ef Br Cr Dr Er M v Lf Lr Iz;
clc;
h=0.001;          % h:basic simulation time interval
no=500;Ts=no*h;  % Ts:sampling time
N=10;            % the number of sampling period
tno=N*no;t=zeros(tno+1,1);X=zeros(3,tno+1,3);
% Vehicle simulation data
Bf=11.275;Cf=1.56;Df=-2574.7;Ef=-1.999;
Br=18.631;Cr=1.56;Dr=-1749.7;Er=-1.7908;
M=1500;v=40;Lf=1.2;Lr=1.3;Iz=3000;
beta0=0.0267;gamma0=-0.0454;deltaf0=-0.0067; %equilibrium point
[Fyf1,Fyf2,Fyf3,Fyr1,Fyr2,Fyr3]=Jacobian(beta0,gamma0,deltaf0);
% Linearization model parameters: A11,A12,A21,A22,B1,B2
A11=1/M/v*(Fyf1+Fyr1);
A12=1/M/v*(Fyf2+Fyr2)-1;
A21=cos(beta0)/Iz*(Lf*Fyf1 -Lr*Fyr1);
A22=cos(beta0)/Iz*(Lf*Fyf2 -Lr*Fyr2);
B1=1/M/v*(Fyf3+Fyr3);
B2=cos(beta0)/Iz*(Lf*Fyf3 -Lr*Fyr3);
% continuous-time LQR gain Design
Q=[1 0;0 1];R=1;
A=[A11 A12;A21 A22];
B=[B1;B2];
[Kc,S,E]=LQR(A,B,Q,R);
% time-invariant discrete-time control gain Design

```

```

sysA=ss(A,B,eye(2),0);
SYSD=c2d(sysA,Ts);
[As,Bs,Cs,Ds]=ssdata(SYSD);
[P,L,Kd,RR]=dare(As,Bs,Q,R);
mode=1; % mode=1: time-variant discrete-time control
        % mode=2: time-invariant discrete-time control
for lp=1:3
    % lp=1: run time-variant discrete-time control
    % lp=2: run time-invariant discrete-time control
    % lp=3: run continuous-time LQR control
    ind=1;
    beta=0.03;gamma=-0.06; % initial value
    X(lp,1,1)=beta;X(lp,1,2)=gamma;X(lp,1,3)=0;
    for j=1:N
        for k=1:no
            ind=ind+1;
            t(ind,1)=(ind-1)*h;
            if (lp == 3) %continuous-time LQR control
                u=-Kc*[beta-beta0;gamma-gamma0];
            else
                if (k == 1)
                    if (lp == 1) %time-variant discrete-time control
                        b1=beta;b2=gamma;
                        alphaf=b1+atan(Lf/v*b2*cos(b1))-deltaf0;
                        tmp1=Cf*atan(Bf*(1-Ef)*alphaf+Ef*atan(Bf*alphaf));
                        tmp2=1+(Bf*(1-Ef)*alphaf+Ef*atan(Bf*alphaf))^2;
                        tmp3=(1-Ef)+Ef/(1+(Bf*alphaf)^2);
                        gu=-(Cf*Bf*tmp3*Df*cos(tmp1)/tmp2);
                        g1=(1/M/v)*gu;
                        g2=(Lf*cos(b1)*gu)/Iz;
                        % time-variant discrete-time control gain Design
                        sysA=ss(A,[g1;g2],eye(2),0);
                        SYSD=c2d(sysA,Ts);
                        [As,Bk,Cs,Ds]=ssdata(SYSD);
                        [P,L,Kt,RR]=dare(As,Bk,Q,R);
                        u=-Kt*[beta-beta0;gamma-gamma0];
                    else
                        %time-invariant discrete-time control

```

```

        u=-Kd*[beta-beta0;gamma-gamma0];
    end;
end;
end;
deltaf=u+deltaf0;
[beta,gamma]=RK4(beta,gamma,deltaf,h);
X(lp,ind,1)=beta;X(lp,ind,2)=gamma;X(lp,ind,3)=u;
end;
end;
end;
subplot(3,1,1);
plot(t,X(mode, :, 1), '-r', t, X(3, :, 1), '-b'), xlabel('t (sec)'), ylabel('beta')
subplot(3,1,2);
plot(t,X(mode, :, 2), '-r', t, X(3, :, 2), '-b'), xlabel('t (sec)'), ylabel('gamma')
subplot(3,1,3);
plot(t,X(mode, :, 3), '-r', t, X(3, :, 3), '-b'), xlabel('t (sec)'), ylabel('control')

```

(3) 車輛動力學模型副程式 (MATLAB 函式)

```

function [h1,h2,Fyf,Fyr]=VehicleDynamics(beta,gamma,deltaf)
global Bf Cf Df Ef Br Cr Dr Er M v Lf Lr Iz;
%Cornering Forces
alphaf=beta+atan((Lf/v*gamma)*cos(beta))-deltaf;
alphar=beta-atan((Lr/v*gamma)*cos(beta));
Fyf=Df*sin(Cf*atan(Bf*(1-Ef)*alphaf+Ef*atan(Bf*alphaf)));
Fyr=Dr*sin(Cr*atan(Br*(1-Er)*alphar+Er*atan(Br*alphar)));
%Vehicle Model
h1=(1/(M*v))*(Fyf+Fyr)-gamma;
h2=(1/(Iz))*(Lf*Fyf-Lr*Fyr)*cos(beta);

```

(4) 車輛動力學模型 Jacobian 矩陣計算副程式 (MATLAB 函式)

```

function [Fyf1,Fyf2,Fyf3,Fyr1,Fyr2,Fyr3]=Jacobian(beta,gamma,deltaf)
global Bf Cf Df Ef Br Cr Dr Er M v Lf Lr Iz;
%Derivatives of Cornering Forces
%d(alphaf)/dx,d(alphar)/dx
alphaf1=1-Lf/v*gamma*sin(beta)/(1+(Lf/v*gamma*cos(beta))^2);
alphaf2=Lf/v*cos(beta)/(1+(Lf/v*gamma*cos(beta))^2);
alphaf3=-1;
alphar1=1+Lr/v*gamma*sin(beta)/(1+(Lr/v*gamma*cos(beta))^2);

```

```

alphar2=-Lr/v*cos(beta)/(1+(Lr/v*gamma*cos(beta))^2);
alphar3=0;
% d(Fyf)/dx, d(Fyr)/dx
alphaf=beta+atan((Lf/v*gamma)*cos(beta))-deltaf;
alphan=beta-atan((Lr/v*gamma)*cos(beta));
tmp1=Df*cos(Cf*atan(Bf*(1-Ef)*alphaf+Ef*atan(Bf*alphaf)));
tmp2=Cf/(1+(Bf*(1-Ef)*alphaf+Ef*atan(Bf*alphaf))^2);
tmp3=Bf*((1-Ef)+Ef/(1+(Bf*alphaf)^2));
Fyf1=tmp1*tmp2*tmp3*alphaf1;
Fyf2=tmp1*tmp2*tmp3*alphaf2;
Fyf3=tmp1*tmp2*tmp3*alphaf3;
tmp1=Dr*cos(Cr*atan(Br*(1-Er)*alphan+Er*atan(Br*alphan)));
tmp2=Cr/(1+(Br*(1-Er)*alphan+Er*atan(Br*alphan))^2);
tmp3=Br*((1-Er)+Er/(1+(Br*alphan)^2));
Fyr1=tmp1*tmp2*tmp3*alphan1;
Fyr2=tmp1*tmp2*tmp3*alphan2;
Fyr3=tmp1*tmp2*tmp3*alphan3;

```

(5) 四階 Runge-Kutta (RK4) 副程式 (MATLAB 函式)

```

function [beta,gamma]=RK4(beta,gamma,deltaf,h)
% f(0)
[k11,k12]=VehicleDynamics(beta,gamma,deltaf);
% f(1/2*h*k1)
beta1=beta+1/2*h*k11;
gamma1=gamma+1/2*h*k12;
[k21,k22]=VehicleDynamics(beta1,gamma1,deltaf);
% f(1/2*h*k2)
beta2=beta+1/2*h*k21;
gamma2=gamma+1/2*h*k22;
[k31,k32]=VehicleDynamics(beta2,gamma2,deltaf);
% f(h*k3)
beta3=beta+h*k31;
gamma3=gamma+h*k32;
[k41,k42]=VehicleDynamics(beta3,gamma3,deltaf);
beta=beta+(k11+2*k21+2*k31+k41)*h*(1/6);
gamma=gamma+(k12+2*k22+2*k32+k42)*h*(1/6);

```